

## การวิเคราะห์ความแปรปรวนหลายตัวแปรและการวิเคราะห์จำแนกประเภท (MANOVA and Discriminant Analysis)

ฉัตรศิริ ปิยะพิมลสิทธิ์\*  
แปลและเรียบเรียง

### ความคล้ายคลึงและความแตกต่างกับ ANOVA

ในกรณีทดสอบความแตกต่างระหว่างกลุ่มตั้งแต่ 3 กลุ่มขึ้นไป โดยมีตัวแปรตามเพียงตัวเดียว เราจะคิดถึงการใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance : ANOVA) แต่ในกรณีที่สนใจจะทดสอบความแตกต่างระหว่างกลุ่มโดยมีตัวแปรตามหลายตัว การใช้ ANOVA ก็จะไม่เหมาะสม เราสามารถใช้เทคนิคการวิเคราะห์ที่เรียกว่าการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบหลายตัวแปร (Multivariate Analysis of Variance : MANOVA) ซึ่งจะแตกต่างกับ ANOVA ตรงที่ใช้วิเคราะห์เมื่อมีตัวแปรตามตัวเดียวหรือหลายตัวก็ได้ เราสามารถค้นหาปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระได้ และยังสามารถเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างกลุ่มที่สนใจได้ การใช้ ANOVA นั้นจะใช้เมื่อตัวแปรตามมีเพียงตัวเดียวหรือที่รู้จักกันในนามของการทดสอบตัวแปรเดียว (univariate test) สำหรับ MANOVA ถูกออกแบบมาเพื่อศึกษาตัวแปรตามหลายตัวหรือรู้จักกันในนามของการทดสอบหลายตัวแปร (multivariate test)

ถ้าเราเก็บรวบรวมข้อมูลที่ประกอบด้วยตัวแปรตามหลายตัวแปรแล้วเราสามารถใช้อะไร ANOVA วิเคราะห์ตัวแปรตามทีละตัวแปรได้ แต่อย่างไรก็ตามการวิเคราะห์ตัวแปรตามหลายตัวแปรในครั้งเดียวย่อมดีกว่าการวิเคราะห์ตัวแปรตามทีละตัว ทำนองเดียวกับการใช้ ANOVA สำหรับทดสอบความแตกต่างระหว่างกลุ่มทั้งหมดในครั้งเดียวย่อมดีกว่าการวิเคราะห์ t-test ทดสอบทีละสองกลุ่ม ทั้งนี้เพราะการวิเคราะห์หลายครั้งจะเพิ่มความคลาดเคลื่อนแบบที่ 1 (type I error) มากขึ้น แต่ถ้าต้องการใช้ ANOVA วิเคราะห์ตัวแปรตามทีละตัว นั้นหมายความว่าเราไม่สนใจความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามแต่ละตัว ซึ่งตัวแปรตามอาจมีความสัมพันธ์กันจะทำให้เราสูญเสียความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร ดังนั้น MANOVA จะวิเคราะห์ตัวแปรตามทั้งหมดในครั้งเดียวทำให้มองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตาม ส่วนการวิเคราะห์ ANOVA จะบอกเราเฉพาะความแตกต่างระหว่างกลุ่มในมิติเดียว แต่ MANOVA มีอำนาจในการค้นหาความแตกต่างระหว่างกลุ่มโดยรวมทุกมิติ เช่น การวิเคราะห์ ANOVA จะบอกแต่เพียงว่าตัวแปรตามตัวเดียวมีความแตกต่างระหว่างกลุ่มตัวอย่าง ส่วน MANOVA จะรวมสารสนเทศเกี่ยวกับผลการวัดในทุก ๆ ตัวแปร และบอกเราเกี่ยวกับกลุ่มตัวอย่างที่มีความแตกต่างกันโดยรวมในทุกตัวแปร นี่คือเหตุผลว่าทำไมการวิเคราะห์ MANOVA ในครั้งเดียวจึงดีกว่าการวิเคราะห์ ANOVA หลายครั้ง

---

\* อาจารย์ประจำภาควิชาการประเมินผลและวิจัย คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

ในการวิเคราะห์ MANOVA มีความซับซ้อนมากที่ยากเกินกว่าเข้าใจถ้าไม่มีความรู้ในเรื่องของเมตริก แต่ในเอกสารนี้จะแสดงในแนวคิดพื้นฐานของ MANOVA โดยใช้เมตริก

### ความสำคัญของเมตริกและฟังก์ชัน

ใน ANOVA เราจะสนใจว่า มีความแปรปรวนเท่าไรที่สามารถอธิบายได้ด้วยตัวแปรจัดกระทำ (นั่นคือมีความแปรปรวนเท่าไรที่อธิบายได้ด้วยองค์ประกอบที่มีผลต่อคะแนนของแต่ละกลุ่ม) ดังนั้น เราจำเป็นต้องรู้ผลรวมของกำลังสองที่ได้ในแต่ละกลุ่ม (sum of squares) (ความแปรปรวนอย่างเป็นระบบ,  $SS_M$ ) และผลรวมของกำลังสอง อันเนื่องมาจากความแตกต่างระหว่างหน่วยตัวอย่าง (ความแปรปรวนคลาดเคลื่อน,  $SS_R$ ) และผลรวมของความแปรปรวนทั้งหมดที่ต้องอธิบาย ( $SS_T$ ) อย่างไรก็ตาม ที่กล่าวมาทั้งหมดนี้จะเชื่อมโยงกับ MANOVA ที่จะนำไปสู่การอธิบายตัวแปรตามหลายตัวพร้อมกัน และใช้เมตริกในการบรรจุข้อมูลเกี่ยวกับความแปรปรวนที่ถูกอธิบายสำหรับตัวแปรตามแต่ละตัว

ใน MANOVA สถิติทดสอบจะเป็นการเปรียบเทียบอัตราส่วนของความแปรปรวนอย่างเป็นระบบและความแปรปรวนคลาดเคลื่อนสำหรับตัวแปรตามหลาย ๆ ตัวแปร การเปรียบเทียบนี้จะทำได้โดยการใช้อัตราส่วนของเมตริกที่แสดงความแปรปรวนอย่างเป็นระบบของตัวแปรตามทั้งหมดกับเมตริกที่แสดงความแปรปรวนคลาดเคลื่อนของตัวแปรทั้งหมด เมตริกที่จะแสดงความแปรปรวนอย่างเป็นระบบ (หรือ sum of square ของตัวแปรทั้งหมด) จะใช้สัญลักษณ์ H หรือเรียกว่า hypothesis sum of squares และ cross-products matrix (หรือ hypothesis SSCP) เมตริกที่แสดงความแปรปรวนคลาดเคลื่อน (the residual sum of squares สำหรับตัวแปรทั้งหมด) จะใช้สัญลักษณ์อักษร E และเรียกว่า error sum of squares และ cross-products matrix (หรือ error SSCP) สุดท้ายเมตริกจะแสดงผลรวมของความแปรปรวนในตัวแปรตามแต่ละตัว (total sum of squares สำหรับตัวแปรตามแต่ละตัว) และใช้สัญลักษณ์ T และจะเรียกว่า total error sum of squares และ cross-products matrix (total SSCP)

### การคำนวณ MANOVA ด้วยมือ

สมมติว่าสนใจจะศึกษาอิทธิพลของการบำบัดพฤติกรรมทางสมอง (cognitive behaviour therapy) กับพฤติกรรมความวิตกกังวล ซึ่งเราจะเปรียบเทียบกลุ่มที่มีความวิตกกังวลหลังจากที่ได้รับการบำบัดพฤติกรรมทางสมอง (CBT : cognitive behavior therapy) และหลังจากบำบัดพฤติกรรม (behavior therapy : BT) กับกลุ่มที่ยังมีความวิตกกังวลใจ (ไม่ได้รับการบำบัด : กลุ่มควบคุม (NT)) ซึ่งนักจิตวิทยาจะศึกษาตัวแปรในเรื่องของพฤติกรรมและระดับสติปัญญาโดยการสังเกตพฤติกรรมที่แสดงออก (Action) และความสามารถทางการคิด (Thoughts) โดยตัวแปรตามนี้จะวัดในครั้งเดียวและนำเสนอผลดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 1 ข้อมูล

กลุ่ม	Actions			Thoughts		
	CBT	BT	NT	CBT	BT	NT
	5	4	4	14	14	13
	5	4	5	11	15	15
	4	1	5	16	13	14
	4	1	4	13	14	14
	5	4	6	12	15	13
	3	6	4	14	19	20
	7	5	7	12	13	13
	6	5	4	15	18	16
	6	2	6	16	14	14
	4	5	5	11	17	18
$\bar{X}$	4.90	3.70	5.00	13.40	15.20	15.00
S	1.20	1.74	1.05	1.90	2.10	2.36
S <sup>2</sup>	1.43	3.12	1.11	3.60	4.40	5.56
	$\bar{X}_{\text{grand}}(\text{Actions}) = 4.53$			$\bar{X}_{\text{grand}}(\text{Thoughts}) = 14.53$		
	$s^2_{\text{grand}}(\text{Actions}) = 2.1195$			$s^2_{\text{grand}}(\text{Thoughts}) = 4.8780$		

ข้อมูลในตาราง 1 จะแสดงผลการวัดของกลุ่ม 1 (CBT) กลุ่ม 2 (BT) และกลุ่ม 3 (NT) ทุกตัวอย่างทั้ง 2 ตัวแปร Action และ Thoughts ต่อไปจะแสดงผลการศึกษาตัวแปรตามทีละตัวด้วยการใช้ ANOVA

#### ANOVA สำหรับตัวแปรตาม Actions

มี sum of squares ที่จำเป็นต้องคำนวณ ประการแรกเราจำเป็นต้องทราบว่ามีความแปรปรวนเท่าใดที่ถูกอธิบายภายใต้ข้อมูล ( $SS_T$ ) ถัดไปเราจะต้องทราบว่ามีความแปรปรวนเท่าใดที่สามารถอธิบายได้ด้วยโมเดล ( $SS_M$ ) และสุดท้ายเราจะมี การประเมินว่ามีความคลาดเคลื่อนเท่าใดในโมเดล ( $SS_R$ ) ซึ่งเราสามารถคำนวณค่าต่าง ๆ ได้ดังนี้

-  $SS_T(\text{Actions})$  sum of squares ของผลรวมจะอ้างอิงโดยการคำนวณความแตกต่างระหว่างคะแนนทั้ง 20 ตัว และค่าเฉลี่ยของคะแนนและการยกกำลังความแตกต่างและ

การเพิ่มค่าด้วยการยกกำลังในอีกทางเลือกหนึ่ง คุณสามารถใช้โปรแกรม SPSS ในการคำนวณความแปรปรวนของข้อมูล Actions และคุณค่านี้ด้วยจำนวนคะแนนลบ 1

$$\begin{aligned} SS_T &= s_{\text{grand}}^2 (n - 1) \\ &= 2.1195 (30 - 1) \\ &= 2.1195(29) \\ &= 61.47 \end{aligned}$$

-  $SS_M(\text{Actions})$  คำนวณโดยการนำค่าเฉลี่ยแต่ละกลุ่มลบกับค่าเฉลี่ยรวมแล้วยกกำลังสอง และคูณด้วยจำนวนคะแนนในกลุ่มและบวกเข้าด้วยกัน

$$\begin{aligned} SS_M &= 10(4.90 - 4.53)^2 + 10(3.70 - 4.53)^2 + 10(5.00 - 4.53)^2 \\ &= 10(0.37)^2 + 10(-0.83)^2 + 10(0.47)^2 \\ &= 1.37 + 6.87 + 2.21 \\ &= 10.47 \end{aligned}$$

-  $SS_R(\text{Actions})$  คำนวณโดยการนำคะแนนของแต่ละคนลบกับค่าเฉลี่ยของกลุ่มแล้วยกกำลังสองและบวกเข้าด้วยกัน ในอีกกรณีหนึ่ง เราสามารถใช้โปรแกรม SPSS คำนวณความแปรปรวนของแต่ละกลุ่มคูณด้วยจำนวนคนในกลุ่ม และลบด้วย 1 จากนั้นบวกเข้าด้วยกัน

$$\begin{aligned} SS_R &= s_{\text{CBT}}^2(n_{\text{CBT}} - 1) + s_{\text{BT}}^2(n_{\text{BT}} - 1) + s_{\text{NT}}^2(n_{\text{NT}} - 1) \\ &= 1.433(10 - 1) + 3.122(10 - 2) + 1.111(10 - 1) \\ &= 1.433(9) + 3.122(9) + 1.111(9) \\ &= 12.9 + 28.1 + 10.0 \\ &= 51.00 \end{aligned}$$

ขั้นตอนถัดไปเป็นการคำนวณ sum of squares เฉลี่ย (Mean Square) โดยการหารด้วยองศาแห่งความเป็นอิสระ (degree of freedom)

SS	df	MS
$SS_M(\text{Actions}) = 10.47$	2	5.235
$SS_R(\text{Actions}) = 51.00$	27	1.889

ขั้นสุดท้ายคำนวณ F โดยการหารค่าเฉลี่ยกำลังสอง (mean square) ของโมเดลด้วย mean squares ของความคลาดเคลื่อน

$$F = \frac{MS_M}{MS_R} = \frac{5.235}{1.889} = 2.771$$

นำค่านี้ไปเปรียบเทียบกับค่าวิกฤติ F จากตารางสถิติ

**ANOVA สำหรับตัวแปรตาม Thoughts**

กรณีของตัวแปรตามตัวเดียวจะมี sum of squares 3 ค่าที่จำเป็นต้องคำนวณคือ

$SS_T(\text{Thoughts})$

$$\begin{aligned} SS_T &= s_{\text{grand}}^2 (n - 1) \\ &= 4.878(30 - 1) \\ &= 4.878(29) \\ &= 141.46 \end{aligned}$$

$SS_M(\text{Thoughts})$

$$\begin{aligned} SS_M &= 10(13.40 - 14.53)^2 + 10(15.2 - 14.53)^2 + 10(15.0 - 14.53)^2 \\ &= 10(-1.13)^2 + 10(0.67)^2 + 10(0.47)^2 \\ &= 12.77 + 4.49 + 2.21 \\ &= 19.47 \end{aligned}$$

$SS_R(\text{Thoughts})$

$$\begin{aligned} SS_R &= s_{\text{CBT}}^2(n_{\text{CBT}} - 1) + s_{\text{BT}}^2(n_{\text{BT}} - 1) + s_{\text{NT}}^2(n_{\text{NT}} - 1) \\ &= 3.6(10 - 1) + 4.4(10 - 1) + 5.56(10 - 1) \\ &= 3.6(9) + 4.4(9) + 5.56(9) \\ &= 32.4 + 39.6 + 50.0 \\ &= 122 \end{aligned}$$

ขั้นถัดไปคำนวณ sum of square เฉลี่ย (Mean Squares) โดยการหารด้วยองศาแห่งความเป็นอิสระ (degree of freedom)

SS	df	MS
$SS_M(\text{Thoughts}) = 19.47$	2	9.735
$SS_R(\text{Thoughts}) = 122.00$	27	4.519

ขั้นสุดท้ายคำนวณค่า F โดยการหาร mean squares ของโมเดลด้วย Mean Square ของความคลาดเคลื่อน

$$F = \frac{MS_M}{MS_R} = \frac{9.735}{4.519} = 2.154$$

นำค่านี้ไปเปรียบเทียบกับค่าวิกฤติ F ในตารางสถิติ

### ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตาม : Cross-Products

เราทราบว่า MANOVA จะใช้ sum of squares เหมือนกับ ANOVA และในหัวข้อถัดไป เราจะพิจารณาใช้ค่าเหล่านี้ อย่างไรก็ตาม เราจะมีอ้างอิงถึง MANOVA ที่ใช้อธิบาย ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตาม และจะมีการใช้ Cross-products 3 ค่าที่เกี่ยวข้องกับ sum of squares นั่นคือ Cross-product ของผลรวม, Cross-product ของโมเดลและ Cross-product ของความคลาดเคลื่อน เราจะพิจารณา Cross-product ของผลรวมเป็นอันดับแรก ( $CP_T$ )

ตาราง 2 การคำนวณ cross-product ของผลรวม

กลุ่ม	Actions	Thoughts	Actions - $\bar{X}_{\text{grand(Actions)}}$ (D <sub>1</sub> )	Thoughts - $\bar{X}_{\text{grand(Thoughts)}}$ (D <sub>2</sub> )	D <sub>1</sub> x D <sub>2</sub>
CBT	5	14	0.47	-0.53	-0.25
	5	11	0.47	-3.53	-1.66
	4	16	-0.53	1.47	-0.78
	4	13	-0.53	-1.53	0.81
	5	12	0.47	-2.53	-1.19
	3	14	-0.53	-0.53	0.81
	7	12	2.47	-2.53	-6.25
	6	15	1.47	0.47	0.69
	6	16	1.47	1.47	2.16
	4	11	-0.53	-3.53	1.87
BT	4	14	-0.53	-0.53	0.28
	4	15	-0.53	0.47	-0.25
	1	13	-3.53	-1.53	5.40
	1	14	-3.53	-0.53	1.87
	4	15	-0.53	0.47	-0.25
	6	19	1.47	4.47	6.57
	5	13	0.47	-1.53	-0.72
	5	18	0.47	3.47	1.63
	2	14	-2.53	-0.53	1.34
	5	17	0.47	2.47	1.16
	4	13	-0.53	-1.53	0.81

กลุ่ม	Actions	Thoughts	Actions - $\bar{X}_{\text{grand(Actions)}}$ (D <sub>1</sub> )	Thoughts - $\bar{X}_{\text{grand(Thoughts)}}$ (D <sub>2</sub> )	D <sub>1</sub> x D <sub>2</sub>
NT	5	15	0.47	0.47	0.22
	5	14	0.47	-0.53	-0.25
	4	14	-0.53	-0.53	0.28
	6	13	1.47	-1.53	-2.25
	4	20	-0.53	5.47	-2.90
	7	13	2.47	-1.53	-3.78
	4	16	-0.53	1.47	-0.78
	6	14	1.47	-0.53	-0.78
5	18	0.47	3.47	1.63	
$\bar{X}_{\text{grand}}$	4.53	14.53	$CP_T = \Sigma(D_1 \times C_2) = 5.47$		

Cross-product เป็นความแตกต่างระหว่างคะแนนและค่าเฉลี่ยในกลุ่มหนึ่งคูณกับความแตกต่างระหว่างคะแนนและค่าเฉลี่ยในกลุ่มอื่น ๆ ในแต่ละกรณีของ cross-product ผลรวมค่าเฉลี่ยที่น่าสนใจคือ ค่าเฉลี่ยรวมสำหรับตัวแปรตามแต่ละตัว (ตาราง 2) เราสามารถปรับ cross-product ให้เป็นสมการได้ โดยใช้ตัวแปรตาม 2 ตัว ผลของสมการสำหรับผลรวม cross-product ของผลรวมจะอธิบายในสมการ 1 ดังนั้น สำหรับตัวแปรตามแต่ละตัวเราจะนำคะแนนแต่ละตัวมาลบกับค่าเฉลี่ยของตัวแปรนั้น จะได้ 2 ค่าต่อคน (สำหรับตัวแปรตาม 2 ตัว) แล้วนำมาคูณกันจะได้ cross-product สำหรับกลุ่มตัวอย่างแต่ละคน (สดมภ์สุดท้ายของตาราง 2) ผลรวมสามารถหาได้โดยการบวก cross-product ของกลุ่มตัวอย่างแต่ละคนเข้าด้วยกัน สมการการหา cross-product มีดังนี้

$$CP_T = \Sigma(x_{i(\text{Actions})} - \bar{X}_{\text{grand(Actions)}})(x_{i(\text{Thoughts})} - \bar{X}_{\text{grand(Thoughts)}}) \quad (1)$$

นี่คือสมการ cross product ของผลรวม จะใช้วัดปริมาณความสัมพันธ์ทั้งหมดระหว่างตัวแปรตาม อย่างไรก็ตามเราจะสนใจว่าตัวแปรจัดกระทำจะมีอิทธิพลต่อตัวแปรตามอย่างไร อิทธิพลนี้จะถูกวัดด้วย cross product ของโมเดล ( $CP_M$ ) วิธีการคำนวณนั้น เราจะใช้ค่าเฉลี่ยของแต่ละกลุ่มลบด้วยค่าเฉลี่ยรวมแล้วนำมาคูณกัน จากนั้นคูณด้วยจำนวนของคะแนนภายในกลุ่ม แล้วนำผลที่ได้ของแต่ละกลุ่มมาบวกเข้าด้วยกัน สมการคำนวณจะแสดงด้วยสมการ (2) และตาราง 3

$$CP_M = \Sigma n[(\bar{x}_{\text{group(Actions)}} - \bar{X}_{\text{grand(Actions)}})(\bar{x}_{\text{group(Thoughts)}} - \bar{X}_{\text{grand(Thoughts)}})] \quad (2)$$

ตาราง 3 การคำนวณ cross product ของโมเดล

	$\bar{X}_{\text{group}}$ Actions	$\bar{X}_{\text{group}} - \bar{X}_{\text{grand}}$ (D <sub>1</sub> )	$\bar{X}_{\text{group}}$ Thoughts	$\bar{X}_{\text{group}} - \bar{X}_{\text{grand}}$ (D <sub>2</sub> )	D <sub>1</sub> x D <sub>2</sub>	N(D <sub>1</sub> x D <sub>2</sub> )
CBT	4.9	0.37	13.4	-1.13	-0.418	-4.18
BT	3.7	-0.83	15.2	0.67	-0.556	-5.56
NT	5.0	0.47	15.0	0.47	0.221	2.21
$\bar{X}_{\text{grand}}$	4.53		14.53		$CP_M = \sum N(D_1 \times D_2) = -7.53$	

ท้ายสุด เราจำเป็นต้องรู้ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตาม 2 ตัวที่ได้รับอิทธิพลของความแตกต่างระหว่างกลุ่มตัวอย่างแต่ละคน cross product ของความคลาดเคลื่อน (CP<sub>R</sub>) จะบอกเราเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามที่ได้รับอิทธิพลจากความแตกต่างหรือความคลาดเคลื่อนในโมเดล CP<sub>R</sub> คำนวณคล้ายกับ cross product ของผลรวม เว้นว่า ค่าเฉลี่ยของกลุ่มจะใช้แทนค่าเฉลี่ยรวม ดังนั้นการคำนวณในความแตกต่างของแต่ละค่าคะแนนเราจะนำคะแนนแต่ละตัวลบออกจากค่าเฉลี่ยของกลุ่มแล้วนำมาบวกเข้าด้วยต้น ดังสมการ (3) และ ตาราง 4

$$CP_R = \sum (x_{i(\text{Actions})} - \bar{X}_{\text{group}(\text{Actions})})(x_{i(\text{Thoughts})} - \bar{X}_{\text{group}(\text{Thoughts})}) \quad (3)$$

ตาราง 4 การคำนวณ cross product ของความคลาดเคลื่อน

Group	Actions	Actions - $\bar{X}_{\text{group}(\text{Actions})}$ (D <sub>1</sub> )	Thoughts	Thoughts - $\bar{X}_{\text{group}(\text{Thoughts})}$ (D <sub>2</sub> )	D <sub>1</sub> x D <sub>2</sub>
CBT	5	0.10	14	0.60	0.06
	5	0.10	11	-2.40	-0.24
	4	-0.90	16	2.60	-2.34
	4	-0.90	13	-0.40	0.36
	5	0.10	12	-1.40	-0.14
	3	-1.90	14	0.60	-1.14
	7	2.10	12	-1.40	-2.94
	6	1.10	15	1.60	1.76
	6	1.10	16	2.60	2.86
	4	-0.90	11	-2.40	2.16



Group	Actions	Actions - $\bar{X}_{\text{group(Actions)}}$ (D <sub>1</sub> )	Thoughts	Thoughts - $\bar{X}_{\text{group(Thoughts)}}$ (D <sub>2</sub> )	D <sub>1</sub> x D <sub>2</sub>
$\bar{X}_{\text{CBT}}$	4.9		13.4		$\Sigma = 0.40$
BT	4	0.30	14	-1.20	-0.36
	4	0.30	15	-0.20	-0.06
	1	-2.70	13	-2.20	5.94
	1	-2.70	14	-1.20	3.24
	4	0.30	15	-0.20	-0.06
	6	2.30	19	3.80	8.74
	5	1.30	13	-2.20	-2.86
	5	1.30	18	2.80	3.64
	2	-1.70	14	-1.20	2.04
5	1.30	17	1.80	2.34	
$\bar{X}_{\text{BT}}$	3.7		15.2		$\Sigma = 22.60$
NT	4	-1.00	13	-2.00	2.00
	5	0.00	15	0.00	0.00
	5	0.00	14	-1.00	0.00
	4	-1.00	14	-1.00	1.00
	6	1.00	13	-2.00	-2.00
	4	-1.00	20	5.00	-5.00
	7	2.00	13	-2.00	-4.00
	4	-1.00	16	1.00	-1.00
	6	1.00	14	-1.00	-1.00
	5	0.00	18	3.00	0.00
$\bar{X}_{\text{NT}}$	5		15		$\Sigma = -10.00$
					$CP_R = \Sigma (D_1 \times D_2) = 13$

สังเกตว่า cross product ของความคลาดเคลื่อน สามารถคำนวณโดยการลบ cross product ของโมเดล จาก cross product ของผลรวม

$$\begin{aligned}
 CP_R &= CP_T - CP_M \\
 &= 5.47 - (-7.53) \\
 &= 13
 \end{aligned}$$

สมการนี้มีประโยชน์ในการคำนวณ cross product ของความคลาดเคลื่อนด้วยมือ ในกรณีที่มีการคำนวณผิด อันที่จริง cross product ของความคลาดเคลื่อนและโมเดล ควรจะรวมกันเป็นค่า cross product ของผลรวม สามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้ในการตรวจสอบความถูกต้องในการคำนวณ

ความแตกต่างของ cross product แต่ละตัวจะบอกเราในบางสิ่งที่สำคัญเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตาม 2 ตัว ถ้าเรามีการวัดตัวแปรตาม 3 ตัวแล้ว cross product ระหว่างคู่ของตัวแปรตามจะถูกคำนวณและการนำเข้าเมตริก SSCP ที่เหมาะสม ความซับซ้อนของการคำนวณจะเพิ่มมากขึ้น จึงมีความจำเป็นที่จะต้องใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เข้าช่วยในการคำนวณ

### เมตริก SSCP(T) ของผลรวม

ในตัวอย่างนี้ เราจะมีเฉพาะตัวแปรตาม 2 ตัว และเมตริกของ SSCP จะมีมิติ 2x2 ถ้ามีตัวแปรตาม 3 ตัวแล้ว ผลของเมตริก SSCP จะมีมิติ 3x3 sum of square และ cross-product ของผลรวมหรือเมตริก SSCP(T) จะบรรจุ sum of square ของผลรวมในแต่ละตัวแปรตามและ cross-product ของผลรวมระหว่างตัวแปรตาม 2 ตัว โดยสดมภ์แรกและแถวแรกของเมตริกที่นำเสนอตัวแปรตามตัวที่ 1 และสดมภ์ที่ 2 และแถวที่ 2 จะนำเสนอตัวแปรตามตัวที่ 2

	Column 1 Actions	Column 2 Thoughts
Row 1 Actions	$SS_{T(\text{Actions})}$	$CP_T$
Row 2 Thoughts	$CP_T$	$SS_{T(\text{Thoughts})}$

จากค่าต่าง ๆ ที่คำนวณได้ก่อนหน้า นำมาแทนที่ในเซลล์ที่เหมาะสมของเมตริกจะได้ SSCP(T) ดังนี้

$$T = \begin{bmatrix} 61.47 & 5.47 \\ 5.47 & 141.47 \end{bmatrix}$$

### เมตริก SSCP(E) ของความคลาดเคลื่อน

sum of squares และ cross-product ความคลาดเคลื่อนหรือเมตริก SSCP(E) ประกอบด้วย sum of squares ของความคลาดเคลื่อนสำหรับตัวแปรตามแต่ละตัวและ cross-product ของความคลาดเคลื่อนระหว่างตัวแปรตาม 2 ตัว เมตริก SSCP(E) นี้จะคล้ายกับเมตริก SSCP(T) ยกเว้นว่า ข้อมูลจะเกี่ยวข้องกับความคลาดเคลื่อนในโมเดล

	Column 1 Actions	Column 2 Thoughts
Row 1 Actions	$SS_{R(\text{Actions})}$	$CP_R$
Row 2 Thoughts	$CP_R$	$SS_{R(\text{Thoughts})}$

จากที่คำนวณไว้ก่อนหน้านี้ และนำมาแทนที่ในเซลล์ที่เหมาะสมของเมตริก เราจะได้เมตริก SSCP(E) ดังนี้

$$E = \begin{bmatrix} 51 & 13 \\ 13 & 122 \end{bmatrix}$$

### เมตริก SSCP(H) ของโมเดล

sum of squares และ cross-product ของโมเดลหรือเมตริก SSCP(H) จะประกอบด้วย sum of squares ของโมเดลสำหรับตัวแปรตามแต่ละตัวและ cross-product ของโมเดลระหว่างตัวแปรตาม 2 ตัว

	Column 1 Actions	Column 2 Thoughts
Row 1 Actions	$SS_{M(\text{Actions})}$	$CP_M$
Row 2 Thoughts	$CP_M$	$SS_{M(\text{Thoughts})}$

จากที่คำนวณไว้ก่อนหน้านี้ และนำมาแทนที่ในเซลล์ที่เหมาะสมของเมตริก เราจะได้เมตริก SSCP(E) ดังนี้

$$H = \begin{bmatrix} 10.47 & -7.53 \\ -7.53 & 19.47 \end{bmatrix}$$

เมื่อเราคำนวณ ANOVA จะเห็นว่า sum of squares ของผลรวมจะเป็นการรวมกันของ sum of squares ของโมเดลและ sum of squares ของความคลาดเคลื่อน (เช่น  $SS_T = SS_M + SS_R$ ) เหมือนกับ MANOVA ดังนั้นเราจะได้

$$\begin{aligned} T &= H + E \\ &= \begin{bmatrix} 10.47 & -7.53 \\ -7.53 & 19.47 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 51 & 13 \\ 13 & 122 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 10.47 + 51 & -7.53 + 13 \\ -7.53 + 13 & 19.47 + 122 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 61.47 & 5.47 \\ 5.47 & 141.47 \end{bmatrix}$$

ผลลัพธ์เป็นเมตริกที่เกิดจากการบวกเมตริกเข้าด้วยกันจะช่วยให้เราเข้าใจการคำนวณ MANOVA เพิ่มมากขึ้น ในแนวคิดเหมือนกับ ANOVA ความแตกต่างจะอยู่ที่เมตริกที่ใช้

### สถิติทดสอบของ MANOVA

ในการทดสอบ ANOVA เราคำนวณอัตราส่วนของ Mean Squares ของโมเดล Mean Squares ของความคลาดเคลื่อน ใน MANOVA ก็ทำนองเดียวกัน ควรจะหารเมตริก H ด้วยเมตริก E แต่มีปัญหาตรงที่เมตริกไม่สามารถหารได้ อย่างไรก็ตาม สามารถทำให้เมตริกเท่าเทียมกันโดยการคูณด้วยเมตริกที่ผ่านการอินเวอร์ส ดังนั้นในการหาร H ด้วย E จะเป็นการคูณ H ด้วยอินเวอร์สของ E (ใช้สัญลักษณ์  $E^{-1}$ ) ดังนั้นสถิติทดสอบที่ใช้กับเมตริก จะเป็นผลจากการคูณ  $SSCP(H)$  กับอินเวอร์สของ  $SSCP(E)$  เมตริกนี้จะเรียกว่า  $HE^{-1}$

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0202 & -0.0021 \\ -0.0021 & 0.0084 \end{bmatrix}$$

$$HE^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2273 & -0.0852 \\ -0.1930 & 0.1794 \end{bmatrix}$$

ใน ANOVA สถิติทดสอบ เราจะได้ค่าของอัตราส่วน F สำหรับ MANOVA เราจะได้เมตริกที่บรรจุค่าหลากหลาย ในตัวอย่างนี้เมตริกจะบรรจุ 4 ค่า แต่ถ้ามีตัวแปรตาม 3 ตัว เมตริกจะมี 9 ค่า ผลของเมตริกจะมีจำนวน  $p^2$  ค่า เมื่อ p คือจำนวนของตัวแปรตาม

### ฟังก์ชันการจำแนก

ปัญหาในการมีหลายค่าของสถิติทดสอบกับการประเมินนัยสำคัญทางสถิติ สามารถพิจารณาอย่างง่าย ๆ โดยการแปลงตัวแปรตามให้อยู่ภายใต้มิติหรือองค์ประกอบ ในการวิเคราะห์การถดถอยจะเป็นการทำงานบนหลักของการหาโมเดลเชิงเส้นที่เหมาะสมกับชุดข้อมูลของตัวแปรพยากรณ์และตัวแปรเกณฑ์ โมเดลเชิงเส้นนี้จะจัดกระทำขึ้นเป็นผลรวมของตัวแปรพยากรณ์ ดังนั้นเป็นไปได้ที่จะคำนวณภายใต้โมเดลเชิงเส้นของตัวแปรตาม การรวมเชิงเส้นของตัวแปรตามจะเรียกว่า variates (หรือบางครั้งเรียกว่า ตัวแปรแฝง latent variable หรือ factor) ดังนั้นเราจะ

ใช้ตัวแปรแฝงเชิงเส้นในการทำนายความเป็นกลุ่มตัวอย่าง ทำนายการจำแนกกลุ่มตัวอย่าง ดังนั้นตัวแปรแฝงนี้สามารถเรียกว่า ฟังก์ชันการจำแนกประเภท (Discriminant function หรือ Discriminant function variates) ความแตกต่างระหว่างฟังก์ชันการจำแนกประเภท และโมเดลการถดถอยพหุคูณ คือเราสามารถจะสกัดฟังก์ชันการจำแนกประเภทได้หลายฟังก์ชันจากชุดของตัวแปรตาม แต่ในการวิเคราะห์การถดถอยพหุคูณ ตัวแปรอิสระทั้งหมด จะรวมอยู่ในโมเดลเดียว เราจะค้นหาฟังก์ชันการจำแนกได้อย่างไร เราจะใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์ให้เกิดประโยชน์มากที่สุด เป็นว่า ฟังก์ชันการจำแนกตัวแรก ( $v_1$ ) จะเป็นผลรวมเชิงเส้นของตัวแปรตามที่ทำให้เกิดความแตกต่างระหว่างกลุ่มมากที่สุด

มีที่มาจากอัตราส่วนความแปรปรวนของโมเดลและความคลาเคลื่อน ( $SS_M/SS_R$ ) จะถูกทำให้มากที่สุด ในฟังก์ชันแรก ฟังก์ชันการจำแนกฟังก์ชันแรก สามารถจะอธิบายในเทอมของสมการการถดถอยเชิงเส้น ดังนี้

$$\begin{aligned} Y &= \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 \\ V_1 &= \beta_0 + \beta_1 DV_1 + \beta_2 DV_2 \\ V_2 &= \beta_0 + \beta_2 \text{Actions} + \beta_2 \text{Thoughts} \end{aligned} \quad (4)$$

สมการ (4) แสดงสมการการถดถอยพหุคูณสำหรับตัวแปรพยากรณ์ 2 ตัว ค่า  $\beta$  ในสมการคือค่าน้ำหนัก (ค่าสัมประสิทธิ์การถดถอย) จะบอกเราถึงความสำคัญของตัวแปรตามแต่ละตัวกับองค์ประกอบที่สนใจ ในการถดถอยค่า  $\beta$  จะอ้างอิงโดยวิธีการ least squares ในการวิเคราะห์ฟังก์ชันการจำแนก ค่า  $\beta$  จะอ้างอิงมาจากค่าไอเกน (eigen value) ของเมตริก  $HE^{-1}$

ในสถานการณ์ที่มีตัวแปรตาม 2 ตัว และ 2 กลุ่มสำหรับตัวแปรอิสระ ซึ่งจะได้ฟังก์ชันเดียว อย่างไรก็ตามในกรณีที่ซับซ้อนมาก เมื่อมีตัวแปรอิสระมากกว่า 2 กลุ่ม (เช่นกรณีตัวอย่างนี้) จะมีฟังก์ชันได้จำนวน  $k - 1$  (เมื่อ  $k$  คือจำนวนกลุ่มของตัวแปรอิสระ) ในตัวอย่างนี้ เราจะได้ฟังก์ชันการจำแนก 2 ชุด ใช้ผลการคำนวณก่อนหน้านี้ ค่า  $\beta$  ในฟังก์ชันจะได้มาจากการคำนวณค่าไอเกนของเมตริก  $HE^{-1}$  และในข้อเท็จจริง จะมีค่าไอเกน 2 ค่าที่ได้มาจากเมตริกนี้ ค่าที่ 1 จะเป็นค่า  $\beta$  สำหรับฟังก์ชันแรกและอีกค่าหนึ่งจะมีค่า  $\beta$  ในฟังก์ชันที่ 2 ซึ่งค่าไอเกนที่ได้จะเป็นเวกเตอร์เมตริก แต่ในการคำนวณจะซับซ้อนมาก ไม่ขอก้าวในเอกสารนี้

$$\text{Eigenvector1} = \begin{bmatrix} 0.603 \\ -0.335 \end{bmatrix}$$

$$\text{Eigenvector2} = \begin{bmatrix} 0.425 \\ 0.339 \end{bmatrix}$$

แทนที่ค่านี้ใน 2 สมการสำหรับฟังก์ชันการจำแนก เราจะได้โมเดลดังสมการ

$$V1 = \beta_0 + 0.603\text{Action} - 0.335\text{Thoughts}$$

$$V2 = \beta_0 + 0.425\text{Action} + 0.339\text{Thoughts} \quad (5)$$

ถ้าเราเพิกเฉยค่าคงที่ ( $\beta_0$ ) สำหรับเวลานี้ จะเป็นสิ่งที่เป็นไปได้ในการใช้สมการฟังก์ชันจำแนกประเภทสำหรับแต่ละฟังก์ชันที่คำนวณคะแนนสำหรับกลุ่มตัวอย่างแต่ละคนด้วยฟังก์ชัน เช่น กลุ่มตัวอย่างคนแรกของกลุ่ม CBT ตัวแปร Action จะมีค่า 5 และตัวแปร Thought จะมีค่า 14 ดังนั้นคะแนนที่คำนวณจากฟังก์ชันที่ 1 จะมีค่า  $-1.675$

$$V1 = (0.603 \times 5) - (0.335 \times 14) = -1.675$$

คะแนนที่คำนวณจากฟังก์ชันที่ 2 จะมีค่า 6.871

$$V2 = (0.425 \times 5) + (0.339 \times 14) = 6.871$$

ถ้าเราคำนวณคะแนนฟังก์ชันจำแนกประเภทสำหรับทุกคนในกลุ่มตัวอย่างและคำนวณเมตริก SSCP (เช่น H, E, T และ  $HE^{-1}$ ) ที่ได้แสดงไว้ก่อนหน้านี้ เราจะพบว่าทั้งหมดนั้นจะมี cross-product เป็นศูนย์ เหตุผลสำหรับกรณีนี้สามารถสกัดฟังก์ชันจากข้อมูลที่เป็นอิสระจากกัน ในกรณีที่ฟังก์ชันที่ถูกสกัดออกมาจะเป็นมิติที่เป็นอิสระจากกัน

การลดทอนข้อมูลนี้จะเป็นคุณสมบัติที่มีประโยชน์มากในกรณีที่เราค้นหาเมตริก  $HE^{-1}$  ที่คำนวณจากคะแนนฟังก์ชัน เราจะพบว่าทั้งหมดของสมาชิกนอกแนวทแยง (cross-product) มีค่าศูนย์ สมาชิกแนวทแยงของเมตริกจะแสดงเป็นอัตราส่วนของความแปรปรวนของโมเดลและความคลาดเคลื่อน (เช่น  $SS_M/SS_R$ ) สำหรับแต่ละค่าภายใต้ฟังก์ชัน ในกรณีทั่วไป ถ้าเรามี  $p$  ตัวแปรตาม เราจะมีจำนวน  $p^2$  ค่าของอัตราส่วนความแปรปรวนของโมเดลและความคลาดเคลื่อน โดยการค้นหาจากฟังก์ชันจำแนก ถ้ามีตัวแปรตาม 4 ตัว เราจะมี 16 ค่าที่เป็นสมาชิกในเมตริก

สำหรับข้อมูลตัวอย่างนี้ เมตริก  $HE^{-1}$  ถูกคำนวณจากคะแนนฟังก์ชัน

$$HE_{\text{variates}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.335 & 0.000 \\ 0.000 & 0.073 \end{bmatrix}$$

ชัดเจนว่าจากเมตริกนี้ เราจะมี 2 ค่าที่พิจารณาเพื่อการประเมินความมีนัยสำคัญของความแตกต่างระหว่างกลุ่ม ดูเหมือนจะเป็นกระบวนการซับซ้อนที่จะลดทอนข้อมูลลงด้วยวิธีการนี้

อย่างไรก็ตาม ค่าในแนวทแยงของเมตริกสำหรับตัวแปร (มีค่า 0.335 และ 0.073) คือค่าไอเกนของเมตริก  $HE^{-1}$  ดังนั้น ค่านี้นำมาใช้นำมาคำนวณได้ โดยตรงจากข้อมูลที่เก็บรวบรวมมาได้ โดยไม่ต้องแปลงค่าเป็นไอเกนเวกเตอร์ มี 4 วิธีในการประเมินความมีนัยสำคัญของความแตกต่างระหว่างกลุ่ม ดังนี้

### 1. Pillai -Bartlett Trace (V)

สถิตินี้แสดงถึงสมการ 6 สัญลักษณ์  $\lambda$  จะเป็นค่าไอเกนสำหรับตัวแปรจำแนกประเภทแต่ละตัว และ  $s$  จะเป็นจำนวนตัวแปร สูตรนี้ผลรวมของสัดส่วนของความแปรปรวนอธิบายบนฟังก์ชันการจำแนก คล้ายกับอัตราส่วน  $SS_M/SS_T$

$$V = \sum_{i=1}^s \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i} \quad (6)$$

สำหรับข้อมูลของเรา Pillai's Trace มีค่า 0.319 ซึ่งสามารถแปลงค่าเป็นการแจกแจง F ได้โดยประมาณ

$$V = \frac{0.335}{1 + 0.335} + \frac{0.073}{1 + 0.073} = 0.319$$

### 2. Hotelling's $T^2$

เป็นสูตรของ Hotelling - Lawlet trace เป็นผลรวมของค่าไอเกนสำหรับแต่ละตัวแปร (สมการ 7) และสำหรับข้อมูลนี้มีค่า 0.408 (0.335 + 0.073) สถิติทดสอบนี้ก็คือผลรวมของ  $SS_M/SS_R$  สำหรับแต่ละตัวแปรและจะเปรียบเทียบกับอัตราส่วน F ใน ANOVA

$$T = \sum_{i=1}^s \lambda_i \quad (7)$$

### 3. Wilks's Lambda ( $\lambda$ )

แลมด้าของ Wilks's จะเป็นผลผลิตของความแปรปรวนที่ไม่สามารถอธิบายได้ ในแต่ละตัวแปร (สมการ 8) สัญลักษณ์  $\Pi$  หมายถึงผลคูณ แลมด้าของ Wild's จะแสดงอัตราส่วนของความแปรปรวนคลาดเคลื่อนกับความแปรปรวนรวม ( $SS_R/SS_T$ ) สำหรับแต่ละตัวแปร

$$\Lambda = \prod_{i=1}^s \frac{1}{1 + \lambda_i} \quad (8)$$

สำหรับข้อมูลในตัวอย่างนี้ ค่าที่ได้คือ 0.698

$$\Lambda = \left( \frac{1}{1+0.335} \right) \left( \frac{1}{1+0.073} \right) = 0.698$$

#### 4. Roy's Largest Root

สถิตินี้ ง่ายมาก ค่าไอเกนสำหรับตัวแปรแรกเป็นค่าที่มากที่สุด ดังนั้นในกรณีนี้จะคล้ายกับ Hotelling-Lawley trace แต่สำหรับตัวแปรแรกเท่านั้น

$$\text{Largest root} = \lambda_{\text{largest}} \quad (9)$$

#### ข้อตกลงเบื้องต้นของ MANOVA

MANOVA มีข้อตกลงเบื้องต้นคล้ายกับ ANOVA แต่ขยายเพิ่มในกรณีตัวแปรตามหลายตัวดังนี้

1. ความเป็นอิสระ ค่าที่สังเกตได้ควรเป็นอิสระกันทางสถิติ
2. การสุ่มตัวอย่าง ข้อมูลควรมาจากกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรที่สนใจศึกษา และวัดข้อมูลในระดับช่วง (interval scale) ขึ้นไป
3. Multivariate normality ใน ANOVA เราจะสมมติว่าตัวแปรตามของเรามีการแจกแจงปกติภายในแต่ละกลุ่ม ในกรณีของ MANOVA เราจะสมมติว่าตัวแปรตามมีการแจกแจงปกติของทุกตัวแปรในแต่ละกลุ่ม
4. ความเป็นเอกพันธ์ของเมตริกความแปรปรวนร่วม ใน ANOVA มีข้อตกลงเกี่ยวกับความแปรปรวนในแต่ละกลุ่มเป็นเอกพันธ์กัน ใน MANOVA เราต้องสมมติว่าตัวแปรตามแต่ละตัวมีความเป็นเอกพันธ์กันในแต่ละกลุ่ม ข้อตกลงเบื้องต้นนี้ ตรวจสอบโดยการทดสอบความเท่ากันของเมตริกความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมของประชากร

#### การตรวจสอบข้อตกลงเบื้องต้น

โดยมากข้อตกลงเบื้องต้นสามารถตรวจสอบได้ด้วยวิธีการเดียวกันกับ ANOVA มีข้อตกลงเบื้องต้นที่เพิ่มขึ้นมาคือ การแจกแจงพหุตัวแปรเป็นโค้งปกติ และความเป็นเอกพันธ์ของเมตริกความแปรปรวนร่วมที่ต้องการกระบวนการตรวจสอบที่แตกต่างกัน ข้อตกลงเบื้องต้นการเป็นโค้งปกติของพหุตัวแปร ไม่สามารถทดสอบได้ด้วย SPSS และมีเฉพาะการตรวจสอบข้อตกลงเบื้องต้นของการเป็นโค้งปกติของตัวแปรเดียว โดยวิเคราะห์ตัวแปรตามทีละตัว ซึ่งง่ายที่จะใช้และมีประโยชน์ เพราะการเป็นโค้งปกติของตัวแปรเดียวเป็นเงื่อนไขการเป็นโค้งปกติของพหุ



ตัวแปร) แต่ไม่รับประกันว่าจะ Multivariate Normality ดังนั้น กระบวนการนี้ดีที่สุดที่เราสามารถทำได้

ข้อตกลงเบื้องต้นของการเท่ากันของเมตริกความแปรปรวนร่วม ข้อตกลงเบื้องต้นนี้ง่ายในการตรวจสอบด้วยการทดสอบของลาเวน หากการทดสอบลาเวนไม่มีนัยสำคัญสำหรับตัวแปรตามแต่ละตัว อย่างไรก็ตาม กรณีตัวแปรตามหลายตัว ควรจะเปรียบเทียบระหว่างกลุ่มโดยใช้ Box's M test การทดสอบนี้ควรจะไม่มีความสำคัญ

### การเลือกสถิติทดสอบ

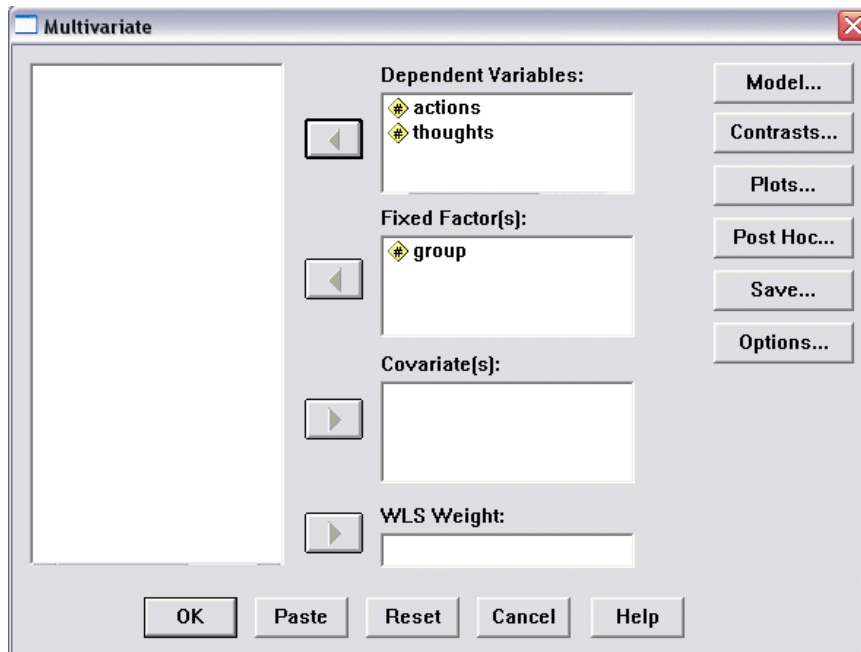
Olson และ Stevens ได้ศึกษาอำนาจการทดสอบของสถิติ MANOVA ทั้ง 4 ตัว Olson สังเกตว่า สำหรับขนาดกลุ่มตัวอย่างน้อย ๆ สถิติทั้ง 4 จะมีความแตกต่างกันน้อย ในเทอมของอำนาจการทดสอบ ถ้าขนาดของกลุ่มตัวอย่างแตกต่างกันในตัวแปรตามตัวเดียว สถิติ Roy จะเสริมอำนาจการทดสอบที่มากกว่า (เพราะจะใช้เฉพาะตัวแปรตัวแรก) ตามด้วย Hotelling, Wilk's และ Pillai อย่างไรก็ตาม เมื่อขนาดของกลุ่มตัวอย่างแตกต่างกันในตัวแปรตามมากกว่า 1 ตัวแปรลำดับของอำนาจการทดสอบจะกลับกันคือ Pillai มีอำนาจการทดสอบมากที่สุด Wilk's, Hotelling และ Roy มีอำนาจน้อยที่สุด ประเด็นสุดท้ายเกี่ยวข้องกับอำนาจการทดสอบของขนาดกลุ่มตัวอย่างและจำนวนของตัวแปรตาม Steven แนะนำว่า ถ้าตัวแปรตามน้อย ๆ (น้อยกว่า 10 ตัวแปร) กลุ่มตัวอย่างควรมีขนาดใหญ่

ในเทอมของความแกร่ง (robustness) สถิติทดสอบทั้ง 4 ตัว จะเกี่ยวข้องกับความแกร่งในการละเมิดข้อตกลงเบื้องต้นของการแจกแจงปกติพหุตัวแปร ในการศึกษาของ Olson และ Steven สรุปว่า เมื่อขนาดกลุ่มตัวอย่างเท่ากัน Pillai-Bartlett จะแข็งแกร่งมากในการละเมิดข้อตกลงเบื้องต้น การตรวจสอบข้อตกลงของเมตริกความแปรปรวนร่วมที่เป็นเอกพันธ์จะใช้ Box's test ถ้าการทดสอบนั้นไม่มีนัยสำคัญ ข้อตกลงเบื้องต้นการแจกแจงปกติพหุตัวแปรจะเป็นจริง

### การวิเคราะห์ MANOVA ด้วย SPSS

ใช้ข้อมูลในตาราง 1 เพื่อวิเคราะห์ โดยการป้อนข้อมูลที่ประกอบไปด้วยตัวแปร 3 ตัว คือ group, actions และ thoughts โดย group ประกอบไปด้วย 3 กลุ่มคือ 1 = CBT, 2 = BT และ 3 = NT และตัวแปรตาม 2 ตัวแปร actions และ thoughts

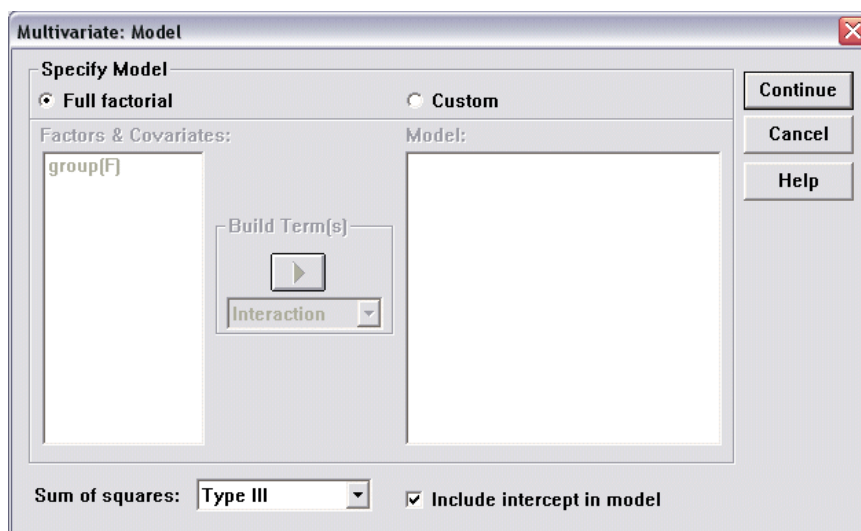
ใช้เมนู Analyze เมอร์ออง General Linear Model.. และเมื่อย่อย Multivariate จะเกิดหน้าต่าง "Multivariate" ให้คลิกตัวแปรตามทั้ง 2 ตัว ในที่นี้คือ actions และ thoughts ย้ายไปไว้ในช่อง "Dependent Variables:" และคลิกตัวแปรอิสระในที่นี้คือ group ไปไว้ในช่อง "Fixed Factor(s):" ดังภาพประกอบ 1



ภาพประกอบ 1

สังเกตในช่อง Covariate(s): สำหรับใส่ตัวแปรร่วม ทำนองเดียวกับการวิเคราะห์ ANCOVA เพียงแต่กรณีที่มีตัวแปรตามหลายตัวจะเรียกว่า MANCOVA นอกจากนี้ยังมีปุ่มทางขวามือให้เลือกคลิกได้อีกดังนี้

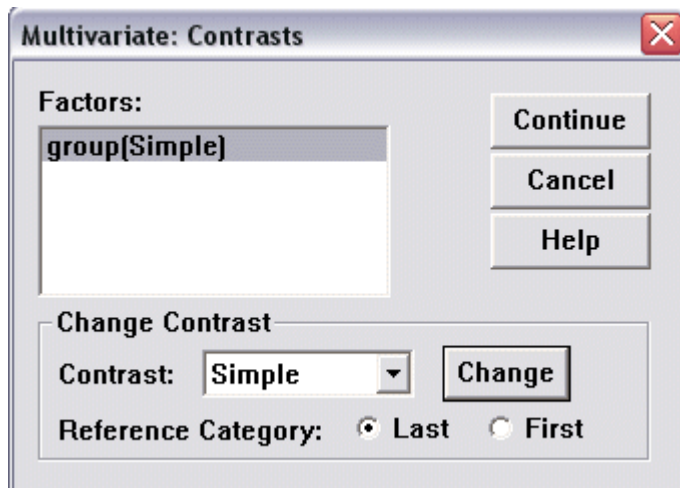
ปุ่ม Model สำหรับเลือกชนิดของ sums of squares ที่ต้องการวิเคราะห์ แสดงดังภาพประกอบ 2



ภาพประกอบ 2

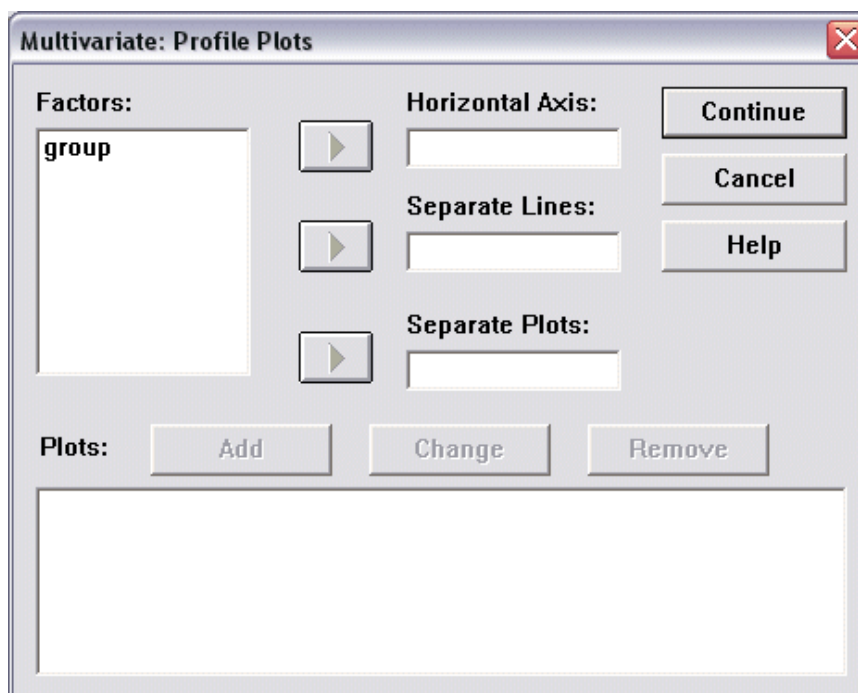
ปุ่ม Contrasts ใช้ในการเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างกลุ่ม โดยชนิดของการ contrasts นั้น ถ้าเลือก simple และคลิกปุ่ม Change จะเป็นการเปรียบเทียบเป็นรายคู่ระหว่าง

กลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม โดยกลุ่มควบคุมนั้น จะต้องถูกลบรหัสไว้เป็นค่ารหัสสุดท้ายของตัวแปร (Reference Category : Last) หรือลงเป็นรหัสค่าแรก (Reference Category : First) ดังภาพประกอบ 3



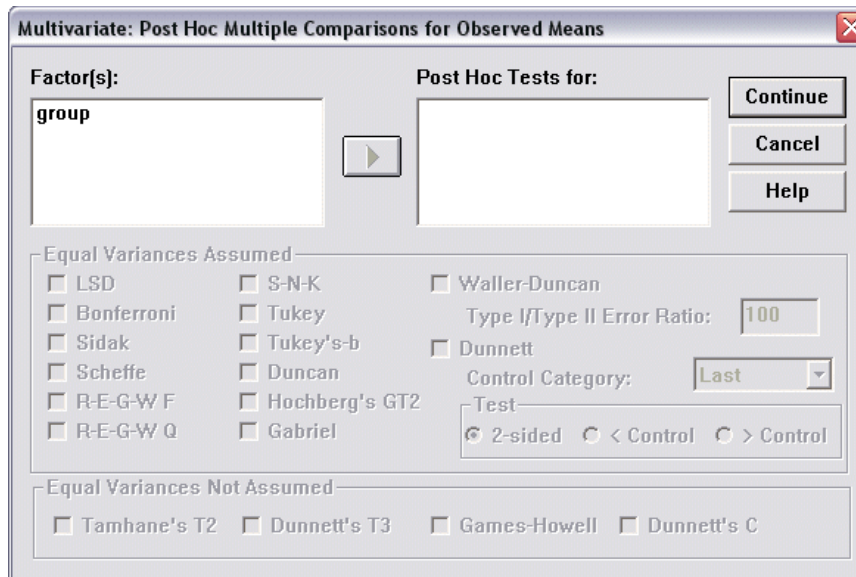
ภาพประกอบ 3

ปุ่ม Plots สำหรับเลือกสร้างกราฟแสดงปฏิสัมพันธ์ จะเป็นประโยชน์เมื่อมีการศึกษาในตัวแปรอิสระมากกว่า 2 ตัวแปร ดังภาพประกอบ 4



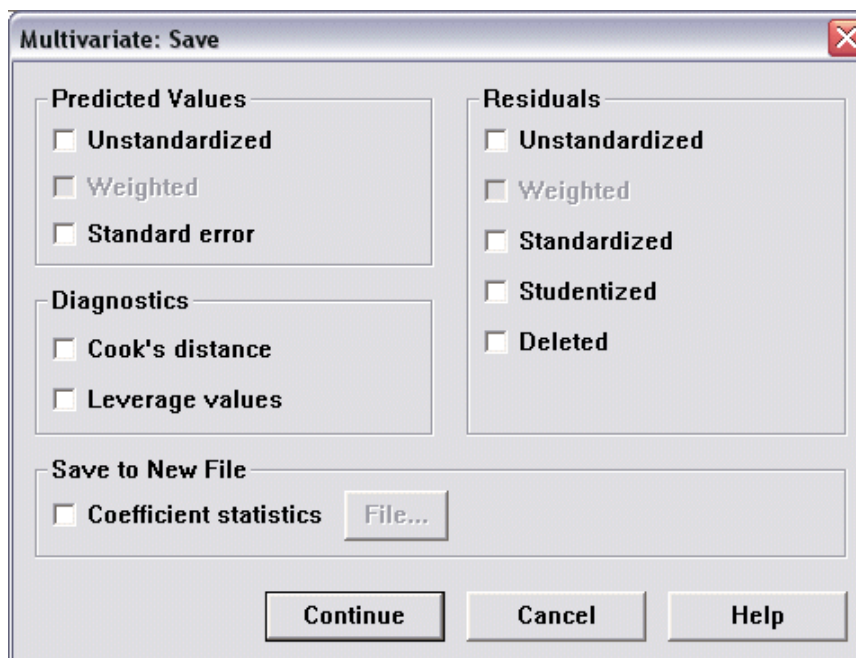
ภาพประกอบ 4

ปุ่ม Post Hoc เป็นอีกปุ่มหนึ่งที่สามารถใช้แทน Contrasts ได้ โดยใช้การทดสอบ Post Hoc เป็นการเปรียบเทียบกลุ่มแต่ละกลุ่มในตัวแปรอิสระกับทุกกลุ่มรวมกัน ดังภาพประกอบ 5



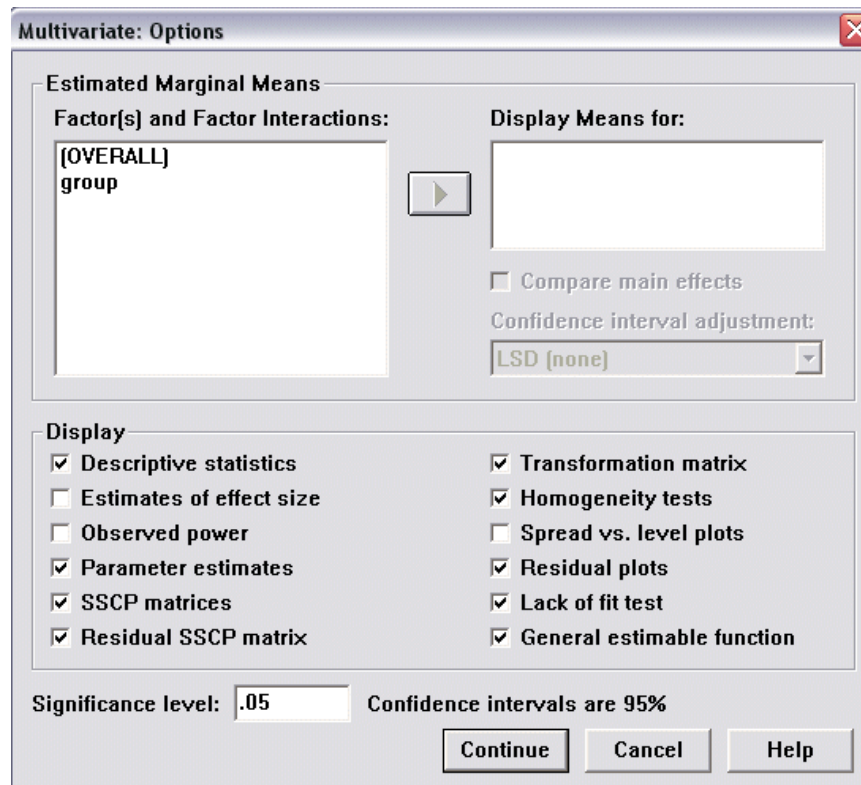
ภาพประกอบ 5

ปุ่ม Save เป็นปุ่มที่ให้แสดงความคลาดเคลื่อน โดยจะเป็นประโยชน์ในการตรวจสอบว่าโมเดลสอดคล้องกับข้อมูลเชิงประจักษ์หรือไม่ ดังภาพประกอบ 6



ภาพประกอบ 6

ปุ่ม Options เป็นปุ่มที่ให้เลือกคำนวณค่าสถิติพื้นฐาน และเมตริกที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์ MANOVA เช่น การคำนวณค่าสถิติพื้นฐาน, เมตริก SSCP, เมตริก Residual SSSCP การทดสอบความเป็นเอกพันธ์ของกลุ่มตัวอย่าง เป็นต้น ดังภาพประกอบ 7



ภาพประกอบ 7

**Descriptive Statistics**

	GROUP	Mean	Std. Deviation	N
ACTIONS	CBT	4.9000	1.19722	10
	BT	3.7000	1.76698	10
	NT	5.0000	1.05409	10
	Total	4.5333	1.45586	30
THOUGHTS	CBT	13.4000	1.89737	10
	BT	15.2000	2.09762	10
	NT	15.0000	2.35702	10
	Total	14.5333	2.20866	30

ภาพประกอบ 8

### ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วย SPSS for Windows

ในภาพประกอบ 8 จะแสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ จะแสดงสถิติพื้นฐานของตัวแปรแต่ละตัว นั้นเป็นผลเนื่องมาจากการเลือกวิเคราะห์ Descriptive statistics ด้วยปุ่ม Options โดยจะแสดงค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานแยกในแต่ละตัวแปรตาม

#### Box's Test of Equality of Covariance Matrices(a)

Box's M	9.959
F	1.482
df1	6
df2	18168.923
Sig.	.180

Tests the null hypothesis that the observed covariance matrices of the dependent variables are equal across groups.

a Design: Intercept+GROUP

#### Bartlett's Test of Sphericity(a)

Likelihood Ratio	.042
Approx. Chi-Square	5.511
df	2
Sig.	.064

Tests the null hypothesis that the residual covariance matrix is proportional to an identity matrix.

a Design: Intercept+GROUP

### ภาพประกอบ 9

ในภาพประกอบ 9 จะแสดงผลการวิเคราะห์สถิติ Box's test ในการทดสอบข้อตกลงเบื้องต้นของความเท่ากันในเมตริกความแปรปรวนร่วม สถิติทดสอบนี้จะมีสมมติฐานศูนย์ว่าเมตริกความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมจะมีความเท่ากันในทุกกลุ่ม ดังนั้นถ้าเมตริกของทั้ง 3 กลุ่มมีความเท่ากันแล้ว สถิติควรจะไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ ในข้อมูลของเรา  $p = 0.18$  มากกว่า  $0.05$  แสดงว่าผลการทดสอบสถิตินี้ไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ นั่นคือเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของความเท่ากันในเมตริกความแปรปรวนร่วม

ถ้าการทดสอบ Box's test มีนัยสำคัญ ( $p < 0.05$ ) แล้ว เมตริกความแปรปรวนร่วมของแต่ละกลุ่มแตกต่างกัน และข้อตกลงของความเป็นเอกพันธ์ของเมตริกความแปรปรวนร่วมจะถูกละเมิด ผลของการละเมิดข้อตกลงเบื้องต้นนี้ยังไม่ชัดเจน Hakstian et al (1979) ได้รายงานว่า Hotelling's T2 จะมีความแกร่งในการทดสอบความแตกต่างระหว่าง 2 กลุ่มเมื่อขนาดของกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มเท่ากัน กฎหัวแม่โป้งโดยทั่วไป ถ้าขนาดกลุ่มตัวอย่างเท่ากันแล้วจะไม่สนใจการทดสอบ Box's test เพราะจะมีความไม่คงที่สูง และสถิติทดสอบ Hotelling's และ Pillai's มีความแกร่ง อย่างไรก็ตามถ้าขนาดของกลุ่มแตกต่างกันแล้วก็ไม่สามารสมมติได้ว่าสถิติทั้งสองตัว

นั้นจะมีความแกร่ง เมื่อมีการศึกษากับตัวแปรตามหลาย ๆ ตัว และมีความแตกต่างกันมากในขนาดของกลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่ม จะมีความบิดเบือนในค่าของความน่าจะเป็นในการวิเคราะห์ด้วย SPSS Tabachnick และ Fidell (1996) ได้แนะนำว่า ถ้าขนาดของกลุ่มตัวอย่างใหญ่มาก และมีความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมมากแล้ว น่าจะมีความเป็นเอกพันธ์ของเมตริกความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม อย่างไรก็ตาม ถ้ามีขนาดกลุ่มตัวอย่างน้อย ผลของความแปรปรวนและความแปรปรวนมีมากแล้ว Box's test จำเป็นสำหรับการตรวจสอบ

การทดสอบบาร์เล็ท (Bartlett's test) จะเป็นการทดสอบข้อตกลงเบื้องต้นของความเป็นเอกพันธ์ของความแปรปรวน ซึ่งการวิเคราะห์ MANOVA จะไม่จำเป็นต้องใช้

### สถิติทดสอบในการวิเคราะห์ MANOVA

ในผลลัพธ์ดังภาพประกอบ 10 จะแสดงตารางหลักของผลการวิเคราะห์ MANOVA สถิติทดสอบจะแสดงผลการทดสอบจุดตัด (Intercept) ของโมเดล และสำหรับความแตกต่างระหว่างกลุ่ม (Group) ในจุดมุ่งหมายของตัวอย่างนี้ กลุ่มมีอิทธิพลที่สนใจเพราะว่าการบำบัดจะมีอิทธิพลต่อกลุ่ม OCD สังเกตสถิติทดสอบทั้ง 4 ตัว จะแสดงค่าของสถิติในสดมภ์ Value และสถิติทดสอบ F-test ที่มีองศาแห่งความเป็นอิสระ (df) คือ 2 ระดับนัยสำคัญแสดงในสดมภ์ Sig. สถิติ Pillai's trace มีค่า  $p = 0.049$  Wils's lambda มีค่า  $p = 0.05$  และ Roy's largest root มีค่า  $p = 0.02$  ซึ่งทั้งหมดมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 อย่างไรก็ตาม Hotelling's Trace ( $p = 0.051$ ) ไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ ในสถานการณ์นี้น่าสนใจ เพราะว่าสถิติทดสอบที่เราเลือกในการกำหนดนั้น เราจะปฏิเสธสมมติฐานศูนย์ และยอมรับสมมติฐานอื่น ที่มีความแตกต่างระหว่างกลุ่ม อย่างไรก็ตาม เราารู้เกี่ยวกับความแกร่งของ Pillai's trace เมื่อขนาดของกลุ่มตัวอย่างเท่ากัน ความน่าเชื่อถือได้เกี่ยวกับผลของสถิติทดสอบบ่งชี้ถึงความมีนัยสำคัญ และช่วยเพิ่มอำนาจการทดสอบให้กับ Roy's root (สังเกตว่าสถิตินี้จะมีความสำคัญสูงกว่าสถิติตัวอื่น ๆ) เมื่อการทดสอบเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้น

จากผลนี้เราควรสรุปว่า ชนิดของการบำบัดจะมีอิทธิพลต่อกลุ่ม OCD อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ธรรมชาติของอิทธิพลนี้ยังไม่ชัดเจนจากการใช้สถิติทดสอบ MANOVA ประการแรก ไม่บอกเกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างกลุ่ม และประการที่สอง ไม่บอกเกี่ยวกับผลของการบำบัดที่มีอิทธิพลต่อ Thoughts หรือ Action หรือทั้งสองอย่าง การกำหนดธรรมชาติของอิทธิพลนี้ SPSS สามารถวิเคราะห์ต่อไปถึงการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบตัวแปรเดียว

## Multivariate Tests(c)

Effect		Value	F	Hypothesis df	Error df	Sig.
Intercept	Pillai's Trace	.983	745.230(a)	2.000	26.000	.000
	Wilks' Lambda	.017	745.230(a)	2.000	26.000	.000
	Hotelling's Trace	57.325	745.230(a)	2.000	26.000	.000
	Roy's Largest Root	57.325	745.230(a)	2.000	26.000	.000
GROUP	Pillai's Trace	.318	2.557	4.000	54.000	.049
	Wilks' Lambda	.699	2.555(a)	4.000	52.000	.050
	Hotelling's Trace	.407	2.546	4.000	50.000	.051
	Roy's Largest Root	.335	4.520(b)	2.000	27.000	.020

a Exact statistic

b The statistic is an upper bound on F that yields a lower bound on the significance level.

c Design: Intercept+GROUP

## ภาพประกอบ 10

## สถิติการทดสอบตัวแปรเดียว

ในภาพประกอบ 11 จะแสดงตารางสรุปการทดสอบของลาเวน (Levene's test) เป็นการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนสำหรับตัวแปรตามแต่ละตัว การทดสอบนี้จะเหมือนกับการวิเคราะห์ใน ANOVA การทดสอบลาเวนควรจะไม่มีนัยสำคัญทางสถิติสำหรับทุกตัวแปรตาม ถ้าข้อตกลงเบื้องต้นของความเป็นเอกพันธ์ของความแปรปรวนเป็นจริง ผลการวิเคราะห์จะชัดเจนว่าเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้น สิ่งเหล่านี้จะไม่เฉพาะให้เราเชื่อมั่นได้ในความเชื่อมั่นของการทดสอบตัวแปรตามทีละตัว แต่ยังเป็นที่ยืนยันว่าการทดสอบทางสถิติด้วย MANOVA มีความแกร่ง

ในส่วนถัดไปจะเป็นผลของตาราง ANOVA สำหรับตัวแปรตามแต่ละตัว เราสนใจในแถวแถวที่มีชื่อว่า Group ซึ่งเป็นตารางสรุปผลการวิเคราะห์ ANOVA ในตัวแปรตามแต่ละตัว ค่าที่ได้จะเป็น sums of squares ทั้งคู่ของ actions และ thoughts (เป็นค่าของ  $SS_M$  ที่คำนวณได้) ในแถวของ Error จะเป็นข้อมูลเกี่ยวกับ sums of squares ของความคลาดเคลื่อน และ mean squares สำหรับตัวแปรตามแต่ละตัว ค่าของ  $SS_R$  ดังที่คำนวณไปแล้วในหัวข้อข้างต้น และในแถวที่ชื่อว่า Corrected Total จะเป็นค่าของ sums of squares ผลรวม สำหรับตัวแปรตามแต่ละตัว (ค่านี้คือ  $SS_T$ ) ส่วนที่สำคัญในตารางนี้คือสถิติของ F และ Sig. ซึ่งเป็นอัตราส่วน F ของการทดสอบ ANOVA ตัวแปรตามทีละตัว ซึ่งจะชัดเจนว่า ANOVA ในผลลัพธ์จาก SPSS ตรงกับค่าที่คำนวณไว้ก่อนหน้านี้ ค่า p ในผลลัพธ์ของภาพประกอบ 11 จะแสดงถึงความไม่แตกต่างระหว่างกลุ่มที่ได้รับการบำบัดทั้งตัวแปร thought ( $p = 0.136$ ) และ action ( $p = 0.08$ ) ผลที่ได้จะนำเราไปสู่การสรุปว่า ชนิดของการบำบัดจะไม่มีอิทธิพลต่อระดับของ OCD ของผู้ป่วยสังเกตในตัวอย่างนี้ สถิติในการวิเคราะห์ MANOVA สรุปว่าการบำบัดมีอิทธิพลอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติกับ OCD ทำไม่ถึงเกิดความขัดแย้งนี้



เหตุผลสำหรับความขัดแย้งของตัวอย่างนี้ การทดสอบ MANOVA จะอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามและความสัมพันธ์นี้จะมีอำนาจในการค้นหาความแตกต่างระหว่างกลุ่มแน่นอนว่า การทดสอบตัวแปรเดียวจะไม่มีประโยชน์ในการแปลความหมาย เพราะกลุ่มที่ต่างกันเกิดจากการรวมความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามเข้าไว้ด้วยกัน ความเกี่ยวข้องกันของตัวแปรตามนี้จะนำไปสู่การวิเคราะห์ฟังก์ชันการจำแนกกลุ่ม ซึ่งจะอธิบายต่อไป

#### Levene's Test of Equality of Error Variances(a)

	F	df1	df2	Sig.
ACTIONS	1.828	2	27	.180
THOUGHTS	.076	2	27	.927

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

a Design: Intercept+GROUP

#### Tests of Between-Subjects Effects

Source	Dependent Variable	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	ACTIONS	10.467(a)	2	5.233	2.771	.080
	THOUGHTS	19.467(b)	2	9.733	2.154	.136
Intercept	ACTIONS	616.533	1	616.533	326.400	.000
	THOUGHTS	6336.533	1	6336.533	1402.348	.000
GROUP	ACTIONS	10.467	2	5.233	2.771	.080
	THOUGHTS	19.467	2	9.733	2.154	.136
Error	ACTIONS	51.000	27	1.889		
	THOUGHTS	122.000	27	4.519		
Total	ACTIONS	678.000	30			
	THOUGHTS	6478.000	30			
Corrected Total	ACTIONS	61.467	29			
	THOUGHTS	141.467	29			

a R Squared = .170 (Adjusted R Squared = .109)

b R Squared = .138 (Adjusted R Squared = .074)

#### ภาพประกอบ 11

##### เมตริก SSCP

ถ้าเลือก options ในการแสดงเมตริก SSCP โปรแกรม SPSS จะแสดงผลลัพธ์ในภาพประกอบ 12 และ 13 ในภาพประกอบ 11 นั้นจะแสดงโมเดล SSCP (H) ซึ่งจะเรียกว่า Hypothesis Group และ SSCP ความคลาดเคลื่อน (E) ซึ่งจะเรียกว่า Error เมตริกสำหรับจุดตัด (Intercept) จะแสดงด้วย แต่เมตริกนี้ไม่มีความสำคัญสำหรับวัตถุประสงค์ในการวิเคราะห์ ดังภาพประกอบ 12 เมตริกนี้มีประโยชน์ ในการค้นหาค่าของ cross-products ที่เป็นตัวบ่งชี้

ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตาม ผลการวิเคราะห์ที่แนะนำว่าถ้า MANOVA มีนัยสำคัญแล้ว อาจจะมีความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามซึ่งมีความสำคัญมากกว่าการวิเคราะห์ตัวแปรตามเป็นรายตัว

**Between-Subjects SSCP Matrix**

			ACTIONS	THOUGHTS
Hypothesis	Intercept	ACTIONS	616.533	1976.533
		THOUGHTS	1976.533	6336.533
	GROUP	ACTIONS	10.467	-7.533
		THOUGHTS	-7.533	19.467
Error		ACTIONS	51.000	13.000
		THOUGHTS	13.000	122.000

Based on Type III Sum of Squares

ภาพประกอบ 12

ในภาพประกอบ 13 จะแสดงเมตริก SSCP ความคลาดเคลื่อนอีกครั้ง แต่ครั้งนี้จะเป็นการรวมเมตริกความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม และเมตริกสหสัมพันธ์เอาไว้ด้วย เมตริกทั้งหมดสัมพันธ์กัน หากจำได้ว่าเมตริกความแปรปรวนร่วมสามารถคำนวณได้โดยการหาร cross-product ด้วยจำนวนของค่าสังเกต ทำนองเดียวกัน ความแปรปรวนถูกคำนวณโดยการหาร sums of squares ด้วย degrees of freedom ในเมตริกความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมที่นำเสนอเป็นค่าเฉลี่ยจากเมตริก SSCP ท้ายที่สุดเราจะเห็นว่า สหสัมพันธ์ในรูปของค่ามาตรฐานของความแปรปรวนร่วม และเมตริกสหสัมพันธ์ จะแสดงในรูปของค่ามาตรฐานจากเมตริกความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม กับเมตริก SSCP เมตริกอื่น ๆ มีประโยชน์สำหรับการประเมินความคลาดเคลื่อนในโมเดล เมตริกความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมจะมีประโยชน์เฉพาะ เพราะว่าการทดสอบบาร์เลท (Bartlett's test) อยู่บนพื้นฐานของเมตริกนี้ การทดสอบบาร์เลทจะเป็นการตรวจสอบเมตริกว่ามีลักษณะเป็นเมตริกเอกลักษณะหรือไม่ ซึ่งเมตริกเอกลักษณะจะเป็นเมตริกที่ค่าในแนวทแยงเป็น 1 และนอกแนวทแยงมีค่าเป็น 0 ดังนั้น การทดสอบบาร์เลทจะบอกถึงสมาชิกในแนวทแยงของเมตริกความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมเท่ากัน (เช่น ความแปรปรวนของกลุ่มเหมือนกัน) และนอกแนวทแยงจะมีสมาชิกประมาณค่าเป็น 0 (เช่น ตัวแปรตามไม่มีความสัมพันธ์กัน) ในกรณีนี้ ความแปรปรวนมีความแตกต่างกัน (1.89 จนถึง 4.52) และความแปรปรวนร่วมมีความแตกต่างจาก 0 (0.48) และการทดสอบบาร์เลทจะเข้าใกล้มีนัยสำคัญ แม้ว่าการอธิบายนี้จะไม่สนใจการทดสอบ MANOVA แต่ก็หวังว่าจะเป็นการขยายให้เห็นถึงแนวคิดของการทดสอบที่เกิดขึ้น

**Residual SSCP Matrix**

		ACTIONS	THOUGHTS
Sum-of-Squares and Cross-Products	ACTIONS	51.000	13.000
	THOUGHTS	13.000	122.000
Covariance	ACTIONS	1.889	.481
	THOUGHTS	.481	4.519
Correlation	ACTIONS	1.000	.165
	THOUGHTS	.165	1.000

Based on Type III Sum of Squares

## ภาพประกอบ 13

**Contrasts**

จากที่เลือกการวิเคราะห์ contrasts แบบ Simple เอาไว้เป็นการเปรียบเทียบกลุ่มบำบัด ทั้ง 2 กลุ่มกับกลุ่มควบคุม ผลลัพธ์จากโปรแกรม SPSS แสดงดังภาพประกอบ 14 จะแสดงผลของการ Contrasts ตารางจะแบ่งออกเป็น 2 ส่วน มีชื่อว่า Level 1 vs. Level 3 และ Level 2 vs. Level 3 เมื่อการลงรหัสเป็นไปตามที่ได้กำหนดไว้ (เช่น ค่า 1 และ 2 เป็นรหัสของกลุ่มทดลอง และค่า 3 เป็นรหัสของกลุ่มควบคุม) นั่นคือจะเป็นผลการ Contrasts ระหว่างกลุ่ม CBT กับ NT และ BT กับ NT ตามลำดับ ผลของการ Contrasts จะแสดงของตัวแปรตามแต่ละตัวแยกกัน ค่าที่แสดงในตารางสำหรับการประมาณค่า Contrasts (Contrasts Estimate) และค่าสมมติฐาน (Hypothesized Values) (ซึ่งจะมีค่า 0 เสมอเพราะเราจะทดสอบสมมติฐานศูนย์ว่ามีความแตกต่างระหว่างกลุ่มเป็นศูนย์) การประมาณค่าสังเกตว่ามีความแตกต่างกัน (Difference) แล้วถูกทดสอบความมีนัยสำคัญว่าแตกต่างจากศูนย์หรือไม่ในช่วงความเชื่อมั่นที่ 95%

สิ่งที่สังเกตได้ในผลลัพธ์จาก SPSS คือจะแสดงผลของค่านัยสำคัญในการ Contrasts บอกความแตกต่างระหว่างกลุ่มว่ามีนัยสำคัญหรือไม่ หรืออาจพิจารณาจากช่วงความเชื่อมั่น ในช่วงความเชื่อมั่น 95% จะบอกถึงความแตกต่างระหว่างกลุ่มนั้นคือมี 95% ของกลุ่มตัวอย่างที่ตกอยู่ในช่วงนี้ ถ้าช่วงความเชื่อมั่นนี้ครอบคลุมศูนย์ (ค่าต่ำสุดติดลบ ค่าสูงสุดเป็นบวก) แล้ว นั่นคือภายใน 95% ของกลุ่มตัวอย่างจะมีค่าความแตกต่างเป็นศูนย์ (ไม่มีความแตกต่างระหว่างกลุ่ม) ดังนั้นเราไม่สามารถเชื่อมั่นว่า ความแตกต่างของกลุ่มมีความหมาย เพราะทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน ถ้าช่วงความเชื่อมั่นไม่ครอบคลุมศูนย์ (เช่น ทั้งค่าต่ำสุด และค่าสูงสุด มีเครื่องหมายเป็นบวกหรือลบทั้งคู่) แล้วเราสามารถเชื่อมั่นได้ว่า จะพบความแตกต่างระหว่างกลุ่มใน 95% ของกลุ่มตัวอย่างที่มาจากประชากรเดียวกัน นั่นคือเราเชื่อได้ว่า ความแตกต่างระหว่างกลุ่มยังมีอยู่ ถ้าช่วงความเชื่อมั่นรวมศูนย์เข้าไว้ด้วยแล้ว ความแตกต่างระหว่างกลุ่มไม่มีนัยสำคัญ ถ้าช่วงความเชื่อมั่นไม่รวมศูนย์แล้ว จะบ่งบอกถึงความแตกต่างระหว่างกลุ่มมีนัยสำคัญทางสถิติที่  $p < 0.05$

**Contrast Results (K Matrix)**

GROUP Simple Contrast <sup>a</sup>		Dependent Variable		
		ACTIONS	THOUGHTS	
Level 1 vs. Level 3	Contrast Estimate	-.100	-1.600	
	Hypothesized Value	0	0	
	Difference (Estimate - Hypothesized)	-.100	-1.600	
	Std. Error	.615	.951	
	Sig.	.872	.104	
	95% Confidence Interval for Difference	Lower Bound	-1.361	-3.551
		Upper Bound	1.161	.351
Level 2 vs. Level 3	Contrast Estimate	-1.300	.200	
	Hypothesized Value	0	0	
	Difference (Estimate - Hypothesized)	-1.300	.200	
	Std. Error	.615	.951	
	Sig.	.044	.835	
	95% Confidence Interval for Difference	Lower Bound	-2.561	-1.751
		Upper Bound	-.039	2.151

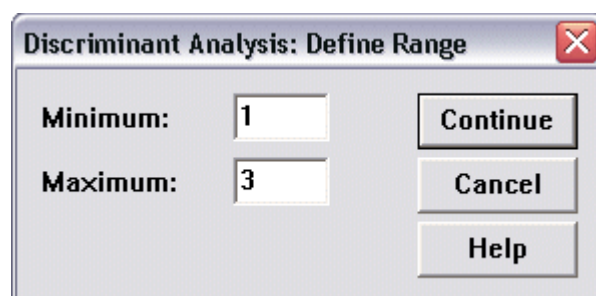
a Reference category = 3

## ภาพประกอบ 14

**MANOVA กับ การวิเคราะห์จำแนกประเภท**

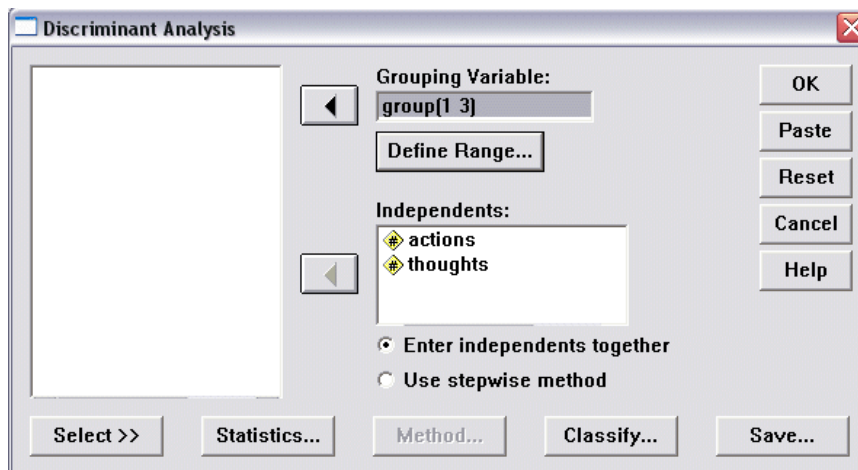
เมื่อ MANOVA มีนัยสำคัญแล้ว อาจใช้ ANOVA หรือการวิเคราะห์จำแนกประเภทวิเคราะห์ต่อ ในตัวอย่างนี้ การใช้ ANOVA ไม่มีประโยชน์ในการค้นหาความแตกต่างภายหลังการทดสอบ Multivariate เพราะมีความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตาม การวิเคราะห์จำแนกประเภทเป็นวิธีที่ดีที่สุดในการใช้ภายหลังการทดสอบด้วย MANOVA

การวิเคราะห์จำแนกประเภทจะใช้เมนู Analyze เมนูรอง Classify และเมนูย่อย Discriminant จะปรากฏหน้าต่าง "Discriminant Analysis" คลิกตัวแปรพยากรณ์ไปใส่ช่อง "Independents" และตัวแปรเกณฑ์ใส่ในช่อง "Grouping Variable:" จากนั้นคลิกที่ปุ่ม "Define Variable" จะปรากฏหน้าต่าง



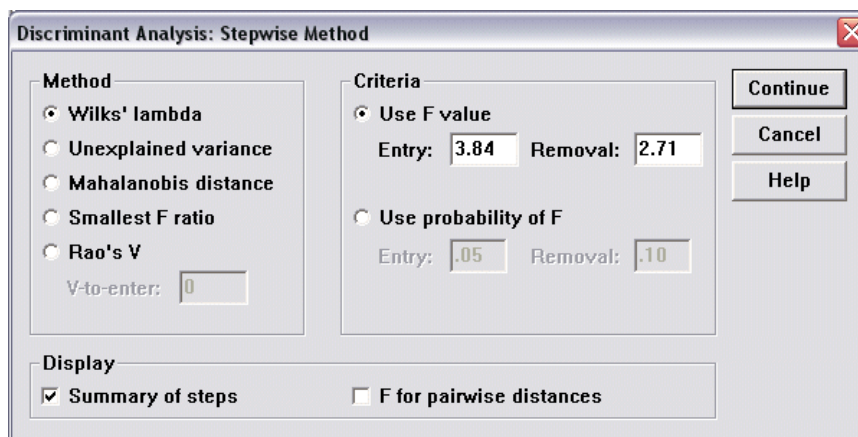
ภาพประกอบ 15

ให้ใส่รหัสที่ใช้ในการจัดกลุ่มจากต่ำสุดไปสูงสุด ในที่นี้ใช้รหัส 1 ถึง 3 แทนกลุ่มทั้ง 3 กลุ่ม จึงใส่ค่าต่ำสุดและสูงสุดดังภาพประกอบ 15 จากนั้นคลิกปุ่ม “OK” สังเกตด้านล่างของช่อง “Independent” ใช้สำหรับกำหนดวิธีการคัดเลือกตัวพยากรณ์ว่าต้องการนำเข้าทั้งหมด “Enter Independent together” ซึ่งเป็น default ของโปรแกรม จะได้ลักษณะดังภาพประกอบ 16

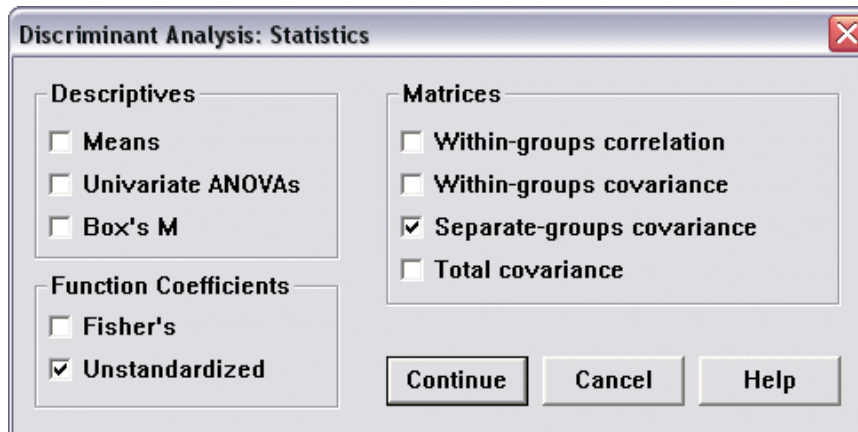


ภาพประกอบ 16

หรือคัดเลือกแบบขั้นตอน “Use stepwise method” ถ้าหากเลือกตัวเลือกนี้ ปุ่ม Method... จะใช้งานได้ สำหรับกำหนดเกณฑ์การนำเข้าตัวแปรพยากรณ์ ดังภาพประกอบ 17

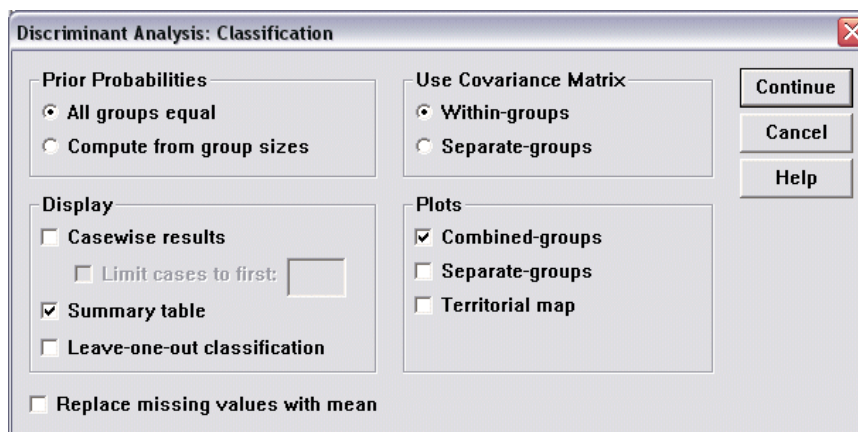


ภาพประกอบ 17



ภาพประกอบ 18

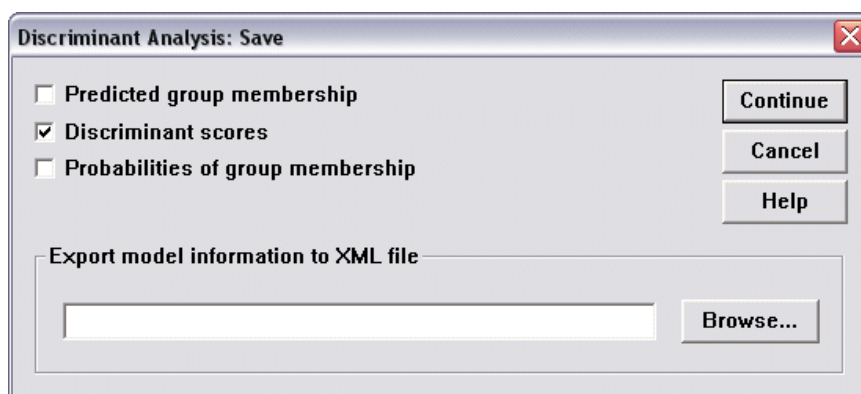
ปุ่ม Statistics... จะปรากฏดังภาพประกอบ 18 ซึ่งปุ่มนี้จะอนุญาตให้เราเลือกวิเคราะห์ค่าสถิติพื้นฐานของกลุ่ม Univariate ANOVA, และ Box's test ซึ่งทั้งหมดนี้มีอยู่ในการวิเคราะห์ MANOVA ยิ่งกว่านั้น ยังสามารถคำนวณค่าสหสัมพันธ์ภายในกลุ่ม และเมตริกความแปรปรวนร่วม ซึ่งจะเหมือนกับสหสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนและเมตริกความแปรปรวนร่วม เหมือนกับการวิเคราะห์ในภาพประกอบ 13 ในตัวเลือกถัดมาเป็นการวิเคราะห์เมตริกความแปรปรวนร่วมแยกกลุ่ม ซึ่งสามารถใช้ประโยชน์ในการพิจารณาสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามของแต่ละกลุ่ม (เมตริกนี้ในการวิเคราะห์ MANOVA จะไม่แสดงผล) และสุดท้ายเราสามารถจะเลือกวิเคราะห์เมตริกความแปรปรวนร่วมรวม ซึ่งจะแสดงเมตริกความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมของตัวแปรตามทั้งหมด กรณีที่มีประโยชน์ก็คือในกล่องของ Function Coefficient ให้เลือกแสดงสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันการจำแนกที่ไม่เป็นมาตรฐาน (Unstandardized) ซึ่งในตัวเลือกนี้จะแสดงค่า  $\beta_s$  สำหรับแต่ละตัวแปร เมื่อคลิกเลือกแล้ว ให้คลิกที่ปุ่ม Continue



ภาพประกอบ 19

สำหรับปุ่ม Classify... จะปรากฏดังภาพประกอบ 19 ในปุ่มนี้จะมีหลายตัวเลือกให้เลือกวิเคราะห์ ตัวเลือกแรกในช่อง Prior Probabilities ถ้าขนาดของกลุ่มเท่ากัน (All group

equal) เป็น default ของโปรแกรม อย่างไรก็ตามถ้ากลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มไม่เท่ากันแล้ว ควรจะเลือก Compute from group sized และ default ของโปรแกรมจะเลือกวิเคราะห์เมตริกความแปรปรวนร่วมภายในกลุ่ม (Within-groups Covariance Matrix) หรืออาจเลือกพล็อตแผนภาพโดยรวมทุกกลุ่ม (combined-groups Plots) หรืออาจพล็อตแยกกลุ่ม (Separate-groups Plots) จำนวนกราฟขึ้นอยู่กับจำนวนกลุ่ม ถ้าจำนวนกลุ่มน้อยควรเลือก Combined groups Plots จะดีกว่า เพราะจะแปลความหมายได้ง่ายกว่า ส่วนตัวเลือกที่มีประโยชน์ก็คือการแสดงตารางสรุปผลการวิเคราะห์ (Summary table) จะแสดงผลการใช้สมการในการจำแนกกลุ่มโดยจะแสดงผลสรุปรวมเมื่อเลือกครบทุกตัวเลือกที่ต้องการแล้วแล้ว คลิกที่ Continue สำหรับกลับไปสู่หน้าต่างหลัก



ภาพประกอบ 20

สำหรับปุ่มสุดท้ายคือปุ่ม Save... จะปรากฏดังภาพประกอบ 20 จะปรากฏ 3 ตัวเลือก สองตัวเลือกจะเกี่ยวข้องกับการทำนายความเป็นสมาชิกของกลุ่ม (Predicted group membership) และความน่าจะเป็นของการเป็นสมาชิกของกลุ่มเมื่อใช้สมการทำนาย (Probabilities of group membership) และตัวเลือกสุดท้ายที่เลือกคือการแสดงคะแนนการจำแนก (Discriminant scores) ซึ่งจะแสดงคะแนนสำหรับกลุ่มตัวอย่างแต่ละคนในแต่ละตัวแปร คะแนนสามารถใช้ประโยชน์ได้ นั่นคือสามารถแปลความหมายได้เมื่อรู้ว่าคะแนนของกลุ่มตัวอย่างแต่ละคนเป็นเท่าไรในแต่ละตัวแปร

### ผลลัพธ์จากการวิเคราะห์จำแนกประเภท

ผลลัพธ์จะการวิเคราะห์ข้อมูลจะแสดงเมตริกความแปรปรวนร่วมแยกสำหรับแต่ละกลุ่ม เมตริกความแปรปรวนของตัวแปรตามแต่ละตัวสำหรับแต่ละกลุ่ม (ภาพประกอบ 21) ค่าในตารางนี้จะมีประโยชน์เกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามที่เปลี่ยนไปในแต่ละกลุ่ม เช่น ในกลุ่ม CBT ตัวแปร Actions และ Thought จะไม่เห็นความสัมพันธ์เพราะความแปรปรวนร่วมเกือบเป็นศูนย์ (0.044) ในกลุ่ม BT ตัวแปร Actions และ Thought มีความสัมพันธ์เป็นบวก (2.511) ส่วนกลุ่ม NT มีความสัมพันธ์เป็นลบ (-1.111)

### Covariance Matrices

GROUP		ACTIONS	THOUGHTS
CBT	ACTIONS	1.433	.044
	THOUGHTS	.044	3.600
BT	ACTIONS	3.122	2.511
	THOUGHTS	2.511	4.400
NT	ACTIONS	1.111	-1.111
	THOUGHTS	-1.111	5.556

ภาพประกอบ 21

ในตาราง 22 แสดงค่าสถิติเบื้องต้นจากการวิเคราะห์จำแนกประเภท ตารางแรกจะเป็นค่าไอเกนสำหรับแต่ละฟังก์ชันและสังเกตว่า ค่าในแนวทแยงของเมตริก  $HE^{-1}$  หรือค่าไอเกนจะถูกแปลงเป็นเปอร์เซ็นต์ของความแปรปรวนที่ถูกอธิบายและฟังก์ชันแรกอธิบายได้ 82.2% ของความแปรปรวนส่วนฟังก์ชันที่ 2 อธิบายได้ 17.8% ในตารางถัดไปจะแสดงค่า Wilk's Lambda ซึ่งจะมีค่า 0.699 มี  $df = 4$  และมีนัยสำคัญที่ 0.05 เท่ากับใน MANOVA จุดที่สำคัญสังเกตว่าตารางนี้มีฟังก์ชันเดียวที่มีนัยสำคัญ (ฟังก์ชันที่ 2 ไม่มีนัยสำคัญที่  $p = 0.173$ ) ดังนั้นความแตกต่างระหว่างกลุ่มสามารถอธิบายได้ใน 1 ฟังก์ชัน

### Eigenvalues

Function	Eigenvalue	% of Variance	Cumulative %	Canonical Correlation
1	.335(a)	82.2	82.2	.501
2	.073(a)	17.8	100.0	.260

a First 2 canonical discriminant functions were used in the analysis.

### Wilks' Lambda

Test of Function(s)	Wilks' Lambda	Chi-square	df	Sig.
1 through 2	.699	9.508	4	.050
2	.932	1.856	1	.173

ภาพประกอบ 22

ตารางในภาพประกอบ 23 จะมีความสำคัญมากสำหรับแปลความหมาย ตารางแรกแสดงสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันการจำแนกที่เป็นมาตรฐานสำหรับ 2 ตัวแปร ในกรณีของสมการถดถอยเชิงเส้น สัมประสิทธิ์ฟังก์ชันการจำแนกที่เป็นมาตรฐานมีความเท่าเทียมกับค่า beta ในการถดถอย



สัมประสิทธิ์จะบอกเราเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของแต่ละตัวแปรกับตัวแปรตาม ชัดเจนว่าขนาดของสัมประสิทธิ์ของตัวแปร Actions มีมากกว่าตัวแปร Thought แต่เครื่องหมายตรงกันข้าม สัมประสิทธิ์ beta ที่เป็นมาตรฐานมีค่าอยู่ระหว่าง  $\pm 1$  ตัวแปรทั้งคู่มีค่ามากในฟังก์ชันแรก และมีค่าเข้าใกล้ 1 และ -1 ตามลำดับ มีเฉพาะฟังก์ชันแรกที่มีความสำคัญ สรุปได้ว่า ตัวแปรตามทั้ง 2 ตัวในชุดของตัวแปรจำแนกประเภทมีตัวแปรหนึ่งตัวที่มีค่าเป็นลบและอีกหนึ่งตัวมีค่าเป็นบวก บ่งชี้ว่าความแตกต่างระหว่างกลุ่มอธิบายได้ด้วยความแตกต่างระหว่างตัวแปรตาม

#### Standardized Canonical Discriminant Function Coefficients

	Function	
	1	2
ACTIONS	.829	.584
THOUGHTS	-.713	.721

#### Structure Matrix

	Function	
	1	2
ACTIONS	.711(*)	.703
THOUGHTS	-.576	.817(*)

Pooled within-groups correlations between discriminating variables and standardized canonical discriminant functions Variables ordered by absolute size of correlation within function.

\* Largest absolute correlation between each variable and any discriminant function

#### ภาพประกอบ 23

อีกวิธีการหนึ่งในการค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามและตัวแปรจำแนกก็คือ เมตริกโครงสร้าง (Structure Matrix) ซึ่งจะแสดงว่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของตัวแปรคาโนนิคอล จะถูกเปรียบเทียบกับค่าน้ำหนักองค์ประกอบ และบ่งชี้ถึงธรรมชาติของตัวแปร Bargman (1920) โต้แย้งว่า เมื่อมีบางตัวแปรของตัวแปรตามที่มีความสัมพันธ์กับตัวแปรคาโนนิคอลมาก ขณะที่ตัวแปรอื่นมีความสัมพันธ์กันต่ำ ซึ่งตัวแปรที่มีสหสัมพันธ์สูงจะใช้ในการจำแนกกลุ่มได้มาก เราสนใจเฉพาะตัวแปรแรก (เพราะตัวแปรที่ 2 ไม่มีนัยสำคัญ) สามารถสรุปได้ว่า ตัวแปร Action มีความสำคัญมากกว่าในความแตกต่างระหว่าง 3 กลุ่ม (เพราะ 0.711 มากกว่า 0.576)

**Canonical Discriminant Function Coefficients**

	Function	
	1	2
ACTIONS	.603	.425
THOUGHTS	-.335	.339
(Constant)	2.139	-6.857

Unstandardized coefficients

**Functions at Group Centroids**

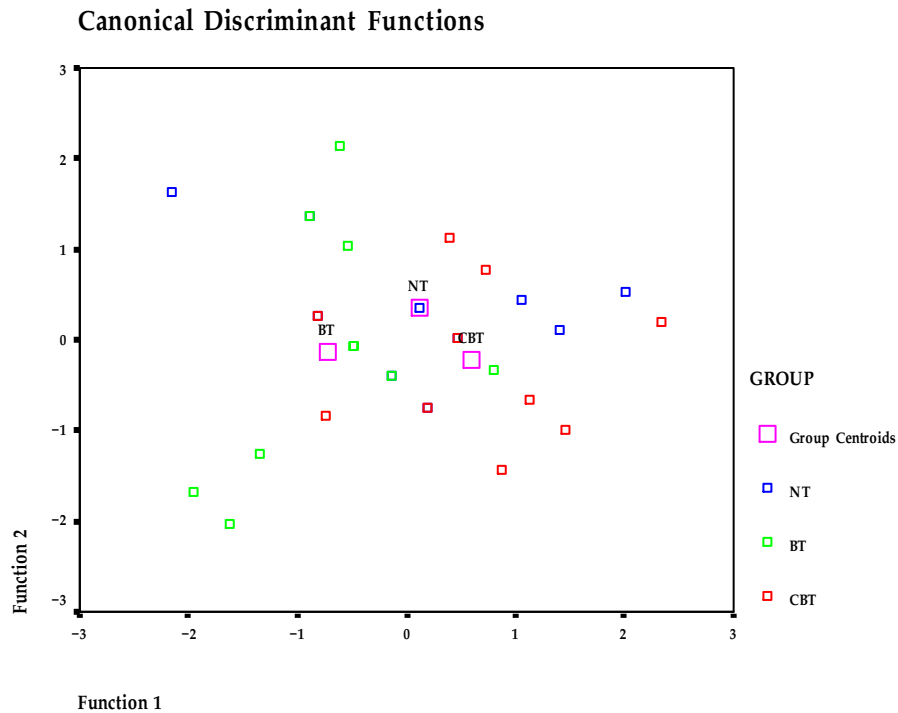
GROUP	Function	
	1	2
CBT	.601	-.229
BT	-.726	-.128
NT	.125	.357

Unstandardized canonical discriminant functions evaluated at group means

## ภาพประกอบ 24

ส่วนถัดไปของผลลัพธ์ในภาพประกอบ 24 จะบอกเกี่ยวกับสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันการจำแนกคาโนนิคอล ซึ่งจะเป็นค่าที่ไม่เป็นมาตรฐานของสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันการจำแนกที่เป็นมาตรฐานที่อธิบายในภาพประกอบ 23 สังเกตว่า ค่านี้คือค่าไอเกนเวกเตอร์ที่ได้มาใช้ในการคำนวณในหัวข้อที่ได้อธิบายไปแล้ว ซึ่งค่านี้มีประโยชน์น้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันการจำแนกที่เป็นมาตรฐาน ตารางถัดไปเป็นเซนทรอยด์ของตัวแปรแต่ละกลุ่ม เซนทรอยด์อธิบายอย่างง่ายก็คือค่าเฉลี่ยตัวแปรในแต่ละกลุ่ม ส่วนการแปลความหมาย ควรมองหาสัญลักษณ์ของเซนทรอยด์ (บวก หรือลบ) ฟังก์ชันที่ 1 จำแนกกลุ่ม BT ออกจากกลุ่มอื่น ๆ (เพราะความแตกต่างระหว่างเซนทรอยด์มีมากกว่า) ฟังก์ชันที่ 2 (ซึ่งไม่มีนัยสำคัญ) ดูเหมือนจะจำแนกกลุ่ม NT จากอีก 2 กลุ่ม

สหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรและกลุ่มจะแสดงโดยการพล็อตกราฟ การพล็อตกราฟนี้จะใช้คะแนนจากฟังก์ชันการจำแนกของกลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่ม นอกจากนี้เซนทรอยด์ของกลุ่มจะเป็นค่าเฉลี่ยของฟังก์ชันในแต่ละ



กลุ่ม

ภาพประกอบ 25

ในภาพประกอบ 25 เป็นการพล็อตข้อมูลในตัวอย่างนี้ และชัดเจนว่า จากตำแหน่งของเซนทรอยด์ (สี่เหลี่ยมใหญ่ที่บ่งบอกกลุ่ม) พิจารณาในแนวนอนที่เป็นช่วงห่างระหว่างเซนทรอยด์ของฟังก์ชันที่ 1 ได้จำแนกกลุ่ม BT ออกจากกลุ่ม NT และ CBT พิจารณาในแนวตั้งที่เป็นช่วงห่างระหว่างเซนทรอยด์ของฟังก์ชันที่ 2 จะไม่มีความแตกต่างระหว่างกลุ่ม เพราะไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ ช่วงห่างระหว่างเซนทรอยด์ของแต่ละกลุ่มจะใกล้กันมาก บ่งชี้ถึงการไม่แยกขาดจากกันของทั้ง 3 กลุ่ม



### บรรณานุกรม

นัตรศิริ ปิยะพิมลสิทธิ์. (2546). การใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์วิเคราะห์ความแปรปรวนพหุ และการจำแนกประเภท. (Online) Available : <http://www.watpon.com>. เข้าถึงเมื่อ มกราคม 2548.

Field, Andy. (2000). **Discovering Statistics Using SPSS for Windows**. London : SAGE Publications, Ltd.

Stevens, James. (1996). **Applied Multivariate Statistics for the Social Sciences**. New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Tabachnick, B. G. and Fidell, L. S. (1996). **Using Multivariate Statistics**. New York : Harper and Row.

จัดทำเสร็จเมื่อเดือนเมษายน. 2548