การวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบหนึ่งตัวประกอบ

ฉัตรศิริ ปิยะพิมลสิทธิ์

การทดสอบ t-test แบบสองกลุ่มอิสระนั้น เป็นการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยระหว่างกลุ่มสองกลุ่มที่เป็นอิสระจากกัน แต่หากต้องการจะเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของกลุ่มที่มากกว่า 2 กลุ่ม ควรใช้สถิติที่เรียกว่า การวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance) ซึ่งอาจจะสงสัยว่าทำไมถึงเรียกว่าการวิเคราะห์ความแปรปรวน ทำไมไม่เรียกว่า การวิเคราะห์ค่าเฉลี่ย ทั้งที่เป็นการมุ่งศึกษาความแตกต่างของค่าเฉลี่ย นั่นเพราะการวิเคราะห์ความแปรปรวน เป็นวิธีการเปรียบเทียบชุดของค่าเฉลี่ยที่พิจารณาในลักษณะของความแปรปรวนระหว่างค่าเฉลี่ย ถ้ากลุ่มตัวอย่างมีค่าเฉลี่ยเท่ากันทุกกลุ่มแล้ว ความแปรปรวนระหว่างค่าเฉลี่ยจะเป็นศูนย์ และถ้ากลุ่มตัวอย่างมีค่าเฉลี่ยไม่เท่ากันแล้ว ความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยก็จะมีค่ามากกว่าศูนย์ กรณีทั่วไป ถ้าความแตกต่างของค่าเฉลี่ยมีมากแล้ว ความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยก็จะมีค่ามาก ดังนั้นความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่ศึกษาก็จะเป็นการค้นหาความแปรปรวนของค่าเฉลี่ย ดังนั้น คำว่า "การวิเคราะห์ความแปรปรวน" จึงเหมาะสมกว่าการเรียกว่า "การวิเคราะห์ค่าเฉลี่ย"

โดยปกติจะใช้สัญลักษณ์ X แทนตัวแปรอิสระ และ Y แทนตัวแปรตาม ดังนั้น การวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบทางเดียว (one-way ANOVA) เป็นการศึกษาความแตกต่างของค่าเฉลี่ยในตัวแปรตาม นักวิจัยสนใจที่จะศึกษาอิทธิพลของตัวแปรอิสระที่มีต่อตัวแปรตาม ตัวอย่างเช่น นักวิจัยอาจจะต้องการศึกษาอิทธิพลของวิธีการสอนว่ามีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาสถิติหรือไม่ ตัวแปรอิสระหรือองค์ประกอบควรจะเป็นวิธีการสอนและตัวแปรตามก็คือผลสัมฤทธิ์วิชาสถิติ ความแตกต่างในวิธีสอน 3 วิธีจะถูกนำมาเปรียบเทียบกันโดยการใช้วิธีสอนทั้ง 3 วิธีกับกลุ่มผู้เรียน 3 กลุ่ม ผู้เรียนจะถูกสุ่มให้ได้รับวิธีสอนแต่ละวิธี และหลังจากสิ้นสุดการสอนจึงทำการสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาสถิติ ผลที่สนใจจะศึกษาคือวิธีการสอนที่กำหนดขึ้นจะมีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาสถิติหรือไม่ วิธีสอนใดที่ช่วยให้ผู้เรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงที่สุด

คุณลักษณะของการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบทางเดียว

คุณลักษณะของการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบทางเดียว ในกรณีที่สนใจจะเปรียบเทียบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยระหว่างกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่ม แน่นอนว่าใช้การทดสอบ independent t-test แต่ถ้าสนใจจะเปรียบเทียบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยระหว่างกลุ่มที่มากกว่าสองกลุ่ม วิธีหนึ่งที่อาจจะเป็นไปได้คือใช้ independent t-test หลาย ๆ ครั้ง โดยเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยทีละคู่ ตัวอย่างเช่น ต้องการศึกษาความแตกต่างของค่าเฉลี่ย 5 กลุ่มที่เป็นอิสระจากกัน ในการเปรียบเทียบ t-test นั้น ต้องจับคู่ทดสอบทีละคู่ สามารถเขียนสมมติฐานศูนย์ได้ดังนี้ 1) μ_1

= μ_2 2) $\mu_1 = \mu_3$ 3) $\mu_1 = \mu_4$ 4) $\mu_1 = \mu_5$ 5) $\mu_2 = \mu_3$ 6) $\mu_2 = \mu_4$ 7) $\mu_2 = \mu_5$ 8) $\mu_3 = \mu_4$ 9) $\mu_3 = \mu_5$ และ 10) $\mu_4 = \mu_5$ จะได้การทดสอบ t-test ถึง 10 ครั้ง ดังนั้นถ้าต้องการเปรียบเทียบความแตกต่างของค่าเฉลี่ย J ตัวแล้ว เราสามารถคำนวณ t-test เป็นรายคู่ได้จำนวน [J(J-1)]/2 คู่

อะไรที่เป็นปัญหาเมื่อทราบว่าจะใช้การทดสอบ t-test จำนวนเท่าไหร่ ปัญหาหลักปัญหาแรกคือความเป็นไปได้ที่จะเกิดความคลาดเคลื่อนแบบที่ 1 (Type I error : α) ที่ผู้วิจัยอาจจะปฏิเสธสมมติฐานศูนย์เมื่อสมมติฐานศูนย์เป็นจริง แม้ว่าระดับของ α ในการทดสอบ t-test แต่ละครั้งจะถูกควบคุมเอาไว้ที่ระดับ 0.05 แต่ระดับ α ทั้งหมดที่เกิดขึ้นในผลการทดสอบทั้งหมดเป็นเท่าไหร่ ซึ่งระดับของ α (α_{total}) ในชุดของการทดสอบทั้งหมดจะเรียกว่า experiment-wise Type I error rate ซึ่งจะมีค่าสูงมากกว่าระดับ α ในการทดสอบแต่ละครั้ง

ในตัวอย่างที่ยกไปข้างต้น เราสนใจที่จะเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยทั้งหมด 10 คู่ การทดสอบ t-test ในแต่ละคู่ทั้งหมด 10 คู่ที่ระดับ $\alpha = 0.05$ แม้ว่าในการทดสอบแต่ละครั้งจะควบคุมระดับ α ไว้ที่ 0.05 ก็ตาม แต่ระดับ α รวมทั้งหมดจะมีค่ามากกว่า เพราะว่ามีความเสี่ยงของการสะสมความคลาดเคลื่อนแบบที่ 1 ระหว่างการทดสอบ สำหรับการทดสอบแต่ละครั้งจะมีความเสี่ยง ยิ่งมีการทดสอบจำนวนมากเท่าใด ยิ่งมีความเสี่ยงมากเท่านั้น ซึ่งสามารถอธิบายเป็นตัวอย่างง่าย ๆ เช่น ในแต่ละวันคุณขับรถจากบ้านไปที่ทำงาน ความเสี่ยงของการเกิดอุบัติเหตุจะมีน้อยหากขับรถแค่วันเดียว อย่างไรก็ตาม ถ้าหากขับรถตลอดทั้งเดือนหรือทั้งปี ความเสี่ยงของการเกิดอุบัติเหตุย่อมมีมากขึ้น

ในการทดสอบ C ครั้งที่เป็นอิสระจากกัน สามารถคำนวณความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นได้ด้วยสูตร

$$\alpha_{total} = 1 - (1 - \alpha)^{C}$$

ในที่นี้เราทำการทดสอบ t-test จำนวน 10 ครั้งที่เป็นอิสระจากกัน ที่ระดับ $\alpha = 0.05$ แล้ว อัตราความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจะเป็น

$$\begin{aligned}\alpha_{total} &= 1 - (1 - 0.05)^{10} \\ &= 1 - 0.6 \\ &= 0.40\end{aligned}$$

แม้ว่าจะควบคุมความคลาดเคลื่อนไว้ที่ระดับ 0.05 แล้วก็ตาม แต่ความน่าจะเป็นในการเกิดความคลาดเคลื่อนของการทดสอบทั้งหมด 10 ครั้งจะเป็น 0.40 หรือการทดสอบทั้งหมด 10 ครั้ง จะเกิดความคลาดเคลื่อนในการทดสอบถึง 4 ครั้ง ส่วนการทดสอบ t-test ที่ไม่เป็นอิสระจากกันทั้งหมด C ครั้ง ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจะเท่ากับ Cα ดังนั้น

$$\alpha \leq \alpha_{total} \leq C\alpha$$

แล้วจะมีวิธีการใดบ้างที่จะสามารถควบคุมการเกิด experiment-wise Type I error rate การที่จะควบคุมระดับของความคลาดเคลื่อนได้จะช่วยให้มีอำนาจการทดสอบสูง ในการทดสอบความแตกต่างที่ใช้ได้ทุกสถานการณ์ (omnibus test) ไม่ว่าจะเปรียบเทียบความแตกต่าง

ของกี่กลุ่ม จะช่วยให้อำนาจการทดสอบสูงขึ้น นั่นคือความน่าจะเป็นในการปฏิเสธสมมติฐานเมื่อสมมติฐานนั้นผิด ซึ่งการทดสอบที่ใช้ได้ในการเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างกลุ่มทุกกลุ่มเพียงครั้งเดียวคือการวิเคราะห์ความแปรปรวน ในกรณีที่มีตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียวเรียกว่า การวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบหนึ่งองค์ประกอบ ที่สามารถใช้ในการทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยระหว่างกลุ่ม 2 กลุ่มหรือมากกว่า

นอกจากนี้ การวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบหนึ่งองค์ประกอบ จะใช้กรณีมีตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียวแต่แบ่งออกเป็นระดับตั้งแต่ 2 ระดับขึ้นไป ในแต่ละระดับจะแสดงถึงความแตกต่างระหว่างกลุ่มที่ต้องการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย ตัวอย่างเช่น วิธีการสอนคือตัวแปรอิสระ ที่แบ่งออกเป็น 3 ระดับ คือ การสอนเป็นกลุ่มใหญ่ การสอนเป็นกลุ่มเล็ก และการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน มีอยู่ 2 แนวคิดเกี่ยวกับการเลือกระดับของตัวแปรอิสระ คือ fixed-effects model นั่นคือระดับทั้งหมดที่ผู้วิจัยสนใจศึกษาจะรวมอยู่ในการออกแบบและการวิเคราะห์ ผลโดยทั่วไปสามารถจะอ้างอิงไปยังระดับในตัวแปรอิสระที่เลือกมาศึกษา ตัวอย่างเช่น ถ้าผู้วิจัยสนใจเฉพาะวิธีสอน 3 วิธี คือ การสอนเป็นกลุ่มใหญ่ การสอนเป็นกลุ่มเล็ก และการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน ผลที่ได้จากการวิจัยจะสรุปอ้างอิงไปยังวิธีสอน 3 วิธีนี้เท่านั้น ไม่สามารถสรุปอ้างอิงไปยังวิธีสอนอื่น ๆ ตัวอย่างของ fixed-effects model ในตัวแปรอิสระ เช่น เพศ ระดับการศึกษา สถานภาพสมรส ฯลฯ

สำหรับ random-effects model คือผู้วิจัยสุ่มมาบางระดับของตัวแปรอิสระเพื่อศึกษาจากระดับที่เป็นประชากรทั้งหมด ผลที่ได้จะสามารถสรุปอ้างอิงไปยังทุกระดับที่เป็นประชากรทั้งหมด ตัวอย่างเช่น ผู้วิจัยสนใจจะศึกษาประสบการณ์การสอนอาจจะสุ่มประสบการณ์การสอนของครูออกมาเป็นระดับ (ตัวแปรอิสระ) ผลที่ได้จะสามารถสรุปอ้างอิงไปยังประสบการณ์การสอนของครูในทุกระดับ การสุ่มเลือกระดับมาศึกษาเหมือนกับกระบวนการสุ่มเลือกกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งเป็นธรรมชาติของสถิติอ้างอิงที่สามารถอ้างอิงจากกลุ่มตัวอย่างไปยังประชากร ในตัวอย่างของ random-effect อาจจะเป็น เวลา (เช่น ชั่วโมง วัน ฯลฯ) หรือปริมาณ (เช่น ลิตร น้ำหนัก ฯลฯ) ซึ่งในหัวข้อนี้จะอธิบายเฉพาะ fixed-effects model เท่านั้น ส่วน random-effects model จะอธิบายในหัวข้อถัดไป

ใน fixed-effects model ระดับของตัวแปรอิสระที่ถูกเลือกนั้น กลุ่มตัวอย่างจะถูกสุ่มให้กับระดับของตัวแปรอิสระแต่ละระดับ ตัวอย่างเช่น นักเรียนอาจจะถูกจัดเป็นชั้นเรียนตั้งแต่เริ่มปีการศึกษาโดยผู้บริหารโรงเรียน ดังนั้นผู้วิจัยอาจจะสุ่มชั้นเรียนเข้าระดับของตัวแปรอิสระ ในอีกสถานการณ์หนึ่ง อาจจะเป็นไปไม่ได้ทางทฤษฎีที่จะสุ่มกลุ่มตัวอย่างเข้ากลุ่มแต่ละกลุ่ม ตัวอย่างเช่น ในการวิจัยโดยทั่วไปที่มีความซับซ้อนมาก ผู้วิจัยอาจจะไม่สามารถสุ่มกลุ่มตัวอย่างเป็นรายบุคคลได้ ดังนั้นความแตกต่างที่เกิดขึ้นจะเกี่ยวข้องกับการสุ่มตัวอย่างเข้ากลุ่ม เมื่อผู้วิจัยมีการสุ่มตัวอย่างเข้ากลุ่ม จะสามารถสรุปอ้างอิงข้อค้นพบได้มากกว่าผู้วิจัยที่ไม่มีการสุ่ม จึงเป็น

ข้อมูลที่บ่งบอกถึงความแตกต่างระหว่างการออกแบบการทดลองแท้จริง (มีการสุ่มกลุ่มตัวอย่างเข้ากลุ่มทดลอง) กับการออกแบบกึ่งทดลอง (ไม่มีการสุ่มกลุ่มตัวอย่างเข้ากลุ่มทดลอง)

ยิ่งกว่านี้ ใน fixed-effects model กลุ่มตัวอย่างแต่ละคนจะได้รับระดับของตัวแปรอิสระเพียงระดับเดียว เป็นไปได้ที่กลุ่มตัวอย่างแต่ละคนจะได้รับระดับของตัวแปรอิสระหลายระดับ ซึ่งจะเรียกว่า repeated-measures models ตัวอย่างเช่น ผู้วิจัยอาจจะสนใจสังเกตนักเรียนในกลุ่มโดยการวัดซ้ำในช่วงเวลาที่แตกต่างกัน ดังนั้น นักเรียนแต่ละคนอาจจะมีการวัดซ้ำทุก ๆ 6 เดือน ซึ่งเป็นแบบแผนการวัดซ้ำ เพราะว่ามีการสอบวัดนักเรียนมากกว่าหนึ่งครั้ง

คุณลักษณะสุดท้าย ในสเกลการวัดของตัวแปรอิสระและตัวแปรตาม ในการวิเคราะห์ความแปรปรวน สเกลของการวัดในตัวแปรตามจะต้องอยู่ในระดับช่วงหรือมากกว่า (interval scale or ratio scale) ถ้าตัวแปรตามถูกวัดในระดับเรียงอันดับ (ordinal scale) แล้วจะต้องใช้การทดสอบทางสถิติแบบไร้พารามิเตอร์ เช่น สถิติ Kruskal-Wallis test เป็นต้น สำหรับตัวแปรอิสระจะเป็นตัวแปรที่ใช้ในการจัดกลุ่ม ซึ่งจะวัดเป็นระดับใดก็ได้ แล้วนำมาผลการวัดมาจัดออกเป็นกลุ่ม

โดยสรุปแล้ว คุณลักษณะของการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบหนึ่งตัวประกอบ จะเป็นแบบ fixed-effects model ที่มีคุณลักษณะดังนี้ 1) สามารถควบคุม experiment-wise error rate ด้วยการทดสอบพร้อมกันทั้งหมด 2) มีตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียวที่แบ่งออกเป็นระดับตั้งแต่ 2 ระดับขึ้นไป 3) ระดับของตัวแปรอิสระจะถูกกำหนด (fixed) โดยผู้วิจัย 4) กลุ่มตัวอย่างถูกสุ่มเข้าในแต่ละระดับของตัวแปรอิสระ 5) กลุ่มตัวอย่างจะได้รับเพียงระดับเดียวของตัวแปรอิสระ และ 6) ตัวแปรตามจะถูกวัดอยู่ในระดับช่วงขึ้นไป (interval or ratio scale)

แบบแผนของข้อมูล

ก่อนที่จะแสดงลำดับขั้นการวิเคราะห์ข้อมูล ต้องเข้าใจถึงแบบแผนของการจัดวางตำแหน่งข้อมูลเสียก่อน ซึ่งแบบแผนของข้อมูลจะถูกออกแบบให้ใช้สัญลักษณ์ Y_{ij} ซึ่งตัวห้อย j แทนกลุ่มหรือระดับของตัวแปรอิสระ และตัวห้อย i แทนลำดับที่ของค่าสังเกตในแต่ละกลุ่ม ตัวอย่างเช่น Y_{34} จะหมายถึงค่าสังเกตตัวที่ 3 ในกลุ่มหรือระดับที่ 4 ของตัวแปรอิสระ ซึ่งตัวห้อยแรกจะมีลำดับจาก i = 1,..., n และตัวห้อยที่สองจะมีลำดับจาก j = 1,..., J ดังนั้นจะหมายถึงระดับของ J ในตัวแปรอิสระและกลุ่มตัวอย่าง n คนในแต่ละระดับ ผลรวมจะเท่ากับกลุ่มตัวอย่างทั้งหมดจำนวน Jn = N คน สมมติว่ามีกลุ่มตัวอย่าง n คนในแต่ละกลุ่ม หมายถึงในแต่ละระดับจะมีจำนวนกลุ่มตัวอย่างเท่ากัน

แบบแผนของข้อสอบแสดงในตาราง 1 ซึ่งจะเห็นว่าในแต่ละสดมภ์จะแสดงถึงกลุ่มหรือระดับของตัวแปรอิสระ และผลรวมในแต่ละสดมภ์จะเป็นค่าเฉลี่ยของกลุ่ม ($\overline{Y}_{.j}$) ผลรวมของค่าสังเกตของกลุ่มตัวอย่างกลุ่ม j ($\Sigma Y_{.j}$) และผลรวมของกำลังสองของค่าสังเกตของกลุ่ม j ($\Sigma Y_{.j}^2$)

โดยสรุปแล้วแบบแผนของข้อมูลจะเป็นรูปแบบที่ผู้วิจัยสามารถนำไปใช้ในการวิเคราะห์โดยไม่สับสน

ตาราง 1 แบบแผนของข้อมูลในการวิเคราะห์ One-way ANOVA

ระดับของตัวแปรอิสระ				
1	2	3	…	J
Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	…	Y_{1J}
Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	…	Y_{2J}
Y_{31}	Y_{32}	Y_{33}	…	Y_{3J}
:	:	:	:	:
Y_{n1}	Y_{n2}	Y_{n3}	…	Y_{nJ}
$\overline{Y}_{.1}$	$\overline{Y}_{.2}$	$\overline{Y}_{.3}$	…	$\overline{Y}_{.J}$
$\Sigma Y_{.1}$	$\Sigma Y_{.2}$	$\Sigma Y_{.3}$	…	$\Sigma Y_{.J}$
$\Sigma Y_{.1}^2$	$\Sigma Y_{.2}^2$	$\Sigma Y_{.3}^2$	…	$\Sigma Y_{.J}^2$

ทฤษฎี ANOVA

ในหัวข้อนี้จะตรวจสอบภายใต้ทฤษฎีและตรรกะของการวิเคราะห์ความแปรปรวน ผลรวมของกำลังสอง และตารางสรุป ANOVA สังเกตในการวิเคราะห์ความแปรปรวนเพื่อทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ย โดยการค้นหาความแปรปรวนของค่าเฉลี่ย

1. ทฤษฎีทั่วไปและตรรกะ

กรณีแรกให้เราเริ่มต้นกับสมมติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์ความแปรปรวน ในกรณีที่มีสองกลุ่มสำหรับการทดสอบ t-test ที่สองกลุ่มเป็นอิสระจากกัน สมมติฐานศูนย์และสมมติฐานอื่นสำหรับการทดสอบสองทางเขียนได้ดังนี้

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

ในกรณีที่มีหลายกลุ่ม คงจะเห็นปัญหาสำหรับการทดสอบ t-test กรณีสองกลุ่มเป็นอิสระจากกันหลาย ๆ ครั้ง โดยจับคู่ทดสอบความแตกต่าง จะทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนแบบที่ 1 เพิ่มมากขึ้น ดังนั้นควรจะใช้การทดสอบเพียงครั้งเดียวทดสอบค่าเฉลี่ยของกลุ่มทั้งหมด สามารถเขียนสมมติฐานสำหรับการวิเคราะห์ความแปรปรวนได้ดังนี้

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_J$$

H_1 : ไม่ใช่ทุก μ_J ที่เท่ากัน

กรณีของ H_1 นี้จะเขียนครอบคลุมทุกความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่เป็นไปได้ โดยเฉพาะค่าเฉลี่ย 2 กลุ่มจากทั้งหมดที่แตกต่างออกไปจากค่าเฉลี่ยอื่น ๆ นอกจากนี้ H_1 ยังรวมไปถึง

$$H_1 \quad : \quad \mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \ldots > \mu_J$$

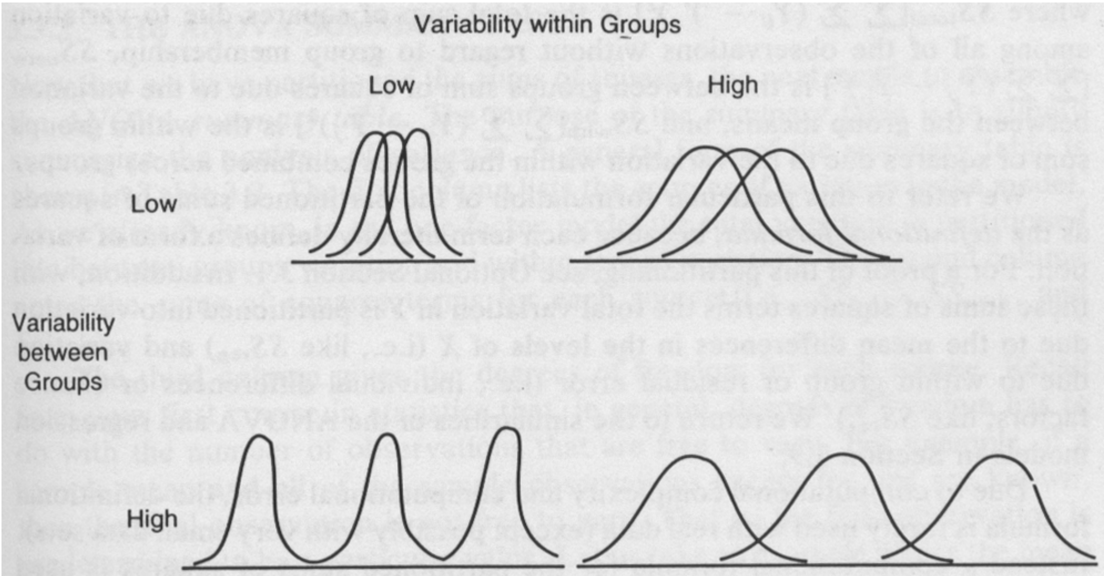
$$H_1 \quad : \quad \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \ldots < \mu_J$$

และความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่เป็นไปได้อื่น ๆ แต่วิธีการเขียน H_1 แบบไม่มีทิศทางจะเหมาะสมกว่า ถ้า H_0 ถูกปฏิเสธแล้วนักวิจัยอาจจะต้องการพิจารณาเป็นรายคู่ของค่าเฉลี่ยเพื่อดูว่าแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญหรือไม่ ซึ่งจะมีการอธิบายการเปรียบเทียบพหุคูณต่อไป

ตัวอย่าง ผู้วิจัยสนใจในอิทธิพลของเวลาในแต่ละวันที่ใช้ในการเรียนกับผลสัมฤทธิ์ในการเรียนสถิติ กลุ่มแบ่งเป็น 3 กลุ่มด้วยเวลาในแต่ละวันที่ใช้ในการเรียนสถิติคือ ครึ่งชั่วโมง หนึ่งชั่วโมง และ สองชั่วโมง ความแตกต่างของอิทธิพลเวลาในแต่ละวันที่ใช้เรียนกับผลสัมฤทธิ์ในการเรียนสถิติโดยใช้ผลการสอบสถิติปลายภาคเรียน หากมีการสอบสถิติมากกว่า 1 ครั้ง ใช้ผลการสอบครั้งที่ได้คะแนนสูงสุด ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้หนึ่งเดียวในประชากรเมื่อเวลาที่ใช้ในการศึกษาไม่มีอิทธิพลในผลสัมฤทธิ์ในการเรียนสถิติ ค่าเฉลี่ยของประชากรมีค่าเท่ากัน นั่นคือ สมมติฐานศูนย์ของประชากรทุกกลุ่มเท่ากัน หรือคือ กลุ่มทั้ง 3 กลุ่มที่เป็นกลุ่มตัวอย่างมาจากประชากรเดียวกันที่มีค่าเฉลี่ย μ แล้วจะมีค่าเฉลี่ยเท่ากัน ดังนั้นไม่มีความแปรปรวนระหว่างค่าเฉลี่ยของทั้ง 3 กลุ่ม ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ที่สองในประชากรเวลาที่ใช้ในการเรียนมีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ในการเรียนสถิติ ค่าเฉลี่ยของประชากรไม่เท่ากัน ดังนั้นสมมติฐานศูนย์เป็นเท็จ นั่นคือ กลุ่มทั้ง 3 กลุ่มจะไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างที่มาจากประชากรเดียวกัน แต่ ในแต่ละกลุ่มจะแสดงความเป็นตัวอย่างจากความแตกต่างของประชากรที่ศึกษาได้มาจากกลุ่มที่ใช้เวลาในการเรียนแตกต่างกัน ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ_j ค่าเฉลี่ยแต่ละกลุ่มไม่เท่ากัน โดยสรุปแล้ว ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างมาจากประชากรที่แตกต่างกัน

ให้เราพิจารณาความเป็นไปได้ในหลายกรณีด้วยภาพประกอบ 1 เรามีนิยามของ ความแปรปรวนภายในกลุ่ม (within group variability) เป็นความแปรปรวนของค่าสังเกตภายในกลุ่มที่นำมารวมกันในแต่ละกลุ่ม และ ความแปรปรวนระหว่างกลุ่ม (between groups variability) เป็นความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยของกลุ่ม ในแกนนอนแสดงความแปรปรวนภายในกลุ่มสูงและกลุ่มต่ำ ส่วนแกนตั้งแสดงความแปรปรวนระหว่างกลุ่มสูงและกลุ่มต่ำ ในภาพบนทางซ้ายมือ ความแปรปรวนของกลุ่มต่ำทั้งคู่ของภายในกลุ่มและระหว่างกลุ่ม นั่นคือในทางปฏิบัติมีความสอดคล้องกันมาก ทั้งคู่ของภายในแต่ละกลุ่มที่เท่ากับระหว่างกลุ่ม ทั้งภายในกลุ่มและระหว่างกลุ่มมีความแปรปรวนในกลุ่มต่ำทั้งคู่ และอาจจะเป็นการปฏิเสธสมมติฐานศูนย์หรือไม่ก็ได้ ในภาพบนทางขวามือ นั่นคือในทางปฏิบัติมีความสอดคล้องกันมากในทุกกลุ่ม แต่ความแปรปรวนของแต่ละกลุ่ม ในที่นี้ความแปรปรวนภายในกลุ่มมีมากกว่าความแปรปรวนระหว่างกลุ่ม และดูเหมือนจะเป็นการยอมรับสมมติฐานศูนย์ ในภาพล่างทางซ้ายมือ ความแปรปรวนภายในกลุ่มต่ำและความแปรปรวนระหว่างกลุ่มสูง นั่นคือ ในทางปฏิบัติมีความสอดคล้องกันมากเฉพาะภายในแต่ละกลุ่ม

ในที่นี้แปรปรวนระหว่างกลุ่มจะมีมากกว่าความแปรปรวนภายในกลุ่ม และเป็นอีกกรณีหนึ่งที่เป็นการปฏิเสธสมมติฐานศูนย์ และภาพล่างด้านขวา สความแปรปรวนในกลุ่มสูงทั้งความแปรปรวนภายในกลุ่มและระหว่างกลุ่ม นั่นคือในทางปฏิบัติแล้วความแปรปรวนภายในแต่ละกลุ่มจะเท่ากับความแปรปรวนระหว่างกลุ่ม ในที่นี้ ความแปรปรวนภายในกลุ่มและระหว่างกลุ่มมีค่าสูงทั้งคู่ และขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ของปริมาณความแปรปรวนภายในกลุ่มและระหว่างกลุ่ม ซึ่งอาจจะปฏิเสธหรือยอมรับสมมติฐานศูนย์ โดยสรุปแล้ว ในสถานการณ์ของเทอมในการค้นหาการปฏิเสธสมมติฐานศูนย์ ควรจะแสดงความแปรปรวนระหว่างกลุ่มให้สูง ๆ และความแปรปรวนภายในกลุ่มให้ต่ำ



ภาพประกอบ 1 แนวคิดในการพิจารณาความแปรปรวนระหว่างกลุ่มและภายในกลุ่ม

การแยกส่วนผลรวมกำลังสอง

ในการแยกส่วนของผลรวมกำลังสองมีความสำคัญในการวิเคราะห์ความแปรปรวนเริ่มต้นกับผลรวมกำลังสองในตัวแปร Y ซึ่งเราจะใช้สัญลักษณ์ว่า SS_Y แต่แทนที่ด้วยสัญลักษณ์ SS_{total} ในเทอมของ SS_{total} จะแสดงจำนวนของความแปรปรวนรวมใน Y ขั้นถัดไปคือการแบ่งส่วนความแปรปรวนรวมออกเป็นความแปรปรวนระหว่างกลุ่ม ใช้สัญลักษณ์ $SS_{between}$ และความแปรปรวนภายในกลุ่ม ใช้สัญลักษณ์ SS_{within} ในการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบหนึ่งองค์ประกอบเราสามารถแบ่งส่วน SS_{total} ได้ดังนี้

$$SS_{total} = SS_{between} + SS_{within}$$

หรือคือ

$$\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{J}(Y_{ij} - \overline{Y}_{..})^2 = \sum_{i}^{n}\sum_{j}^{J}(\overline{Y}_{.j} - \overline{Y}_{..})^2 + \sum_{i}^{n}\sum_{j}^{J}(Y_{ij} - \overline{Y}_{.j})^2$$

เมื่อ SS_{total} ($\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{J}(Y_{ij}-\overline{Y}_{..})^2$) คือผลรวมกำลังสองของทั้งหมดอันเนื่องมาจากความแปรปรวนทั้งหมดของค่าที่สังเกต $SS_{between}$ ($\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{J}(\overline{Y}_{.j}-\overline{Y}_{..})^2$) คือผลรวมกำลังสองระหว่างกลุ่มอันเนื่องมาจากความแปรปรวนระหว่างค่าเฉลี่ยของกลุ่ม และ SS_{within} ($\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{J}(Y_{ij}-\overline{Y}_{.j})^2$) คือผลรวมกำลังสองภายในกลุ่มอันเนื่องมาจากความแปรปรวนภายในกลุ่มของทุกกลุ่ม

เราจะอ้างอิงถึงสมการเหล่านี้ในการแบ่งส่วนผลรวมกำลังสอง เพราะว่าในแต่ละเทอมที่แสดงเอาไว้เป็นรูปแบบของความแปรปรวน นอกจากนี้ในเทอมของผลรวมกำลังสองของความแปรปรวนรวมใน Y จะถูกแบ่งเป็นความแปรปรวนอันเนื่องมาจากความแตกต่างของค่าเฉลี่ยในระดับของ X และความแปรปรวนอันเนื่องมาจากภายในกลุ่มหรือความคลาดเคลื่อน

ในการคำนวณที่ซับซ้อนและการคำนวณความคลาดเคลื่อน นิยามสมการในการคำนวณทั้งหมดควรจะใช้กับข้อมูลดิบ (ยกเว้นว่าข้อมูลมีจำนวนน้อยมาก) แทนที่สมการคำนวณสำหรับการแบ่งส่วนผลรวมกำลังสองที่ใช้คำนวณด้วยมือ สูตรสมการสำหรับการแบ่งส่วนของผลรวมกำลังสองจะเท่ากับ

$$SS_{total} = SS_{between} + SS_{within}$$

หรือคือ

$$\left[\frac{\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{J}Y_{ij}^2-\left(\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{J}Y_{ij}\right)^2}{N}\right] = \left[\frac{\sum_{j}^{J}\left(\sum_{i}^{n}Y_{ij}\right)^2}{n}-\frac{\left(\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{J}Y_{ij}\right)^2}{N}\right] + \left[\frac{\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{J}Y_{ij}^2-\sum_{j}^{J}\left(\sum_{i}^{n}Y_{ij}\right)^2}{n}\right]$$

ในทั้งสามเทอมของสมการนี้มีความแตกต่างกัน โดยในเทอมของ SS_{total} และ SS_{within} นั้น ตัวที่เหมือนกันคือ $\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{J}Y_{ij}^2$ ซึ่งจะเป็นคะแนนแต่ละตัวมายกกำลังสองและบวกเข้าด้วยกันในทุก ๆ ค่าคะแนนที่วัดได้ (ทั้งภายในกลุ่มเดียวกันและข้ามกลุ่ม) ในเทอมของ SS_{total} และ $SS_{between}$ นั้น ตัวที่เหมือนกันคือ $\frac{\left(\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{J}Y_{ij}\right)^2}{N}$ สำหรับทุกค่าคะแนนนำมารวมกันแล้วยกกำลังสองและหารด้วยจำนวนกลุ่มทั้งหมด (nJ = N) สำหรับในเทอมของ $SS_{between}$ และ SS_{within} ที่

เหมือนกันคือ $\dfrac{\sum_{j}^{J}\left(\sum_{i}^{n} Y_{ij}\right)^2}{N}$ สำหรับทุกค่าคะแนนที่อยู่ในกลุ่มเดียวกันนำมารวมกันแล้วยกกำลังสอง จากนั้นบวกเข้าด้วยกันในทุกกลุ่มแล้วหารด้วยจำนวนค่าคะแนนทั้งหมด แต่ในการคำนวณเราจะคำนวณเฉพาะ $SS_{between}$ และ SS_{within} สำหรับ SS_{total} ใช้ในการตรวจสอบว่าคำนวณถูกต้องหรือไม่ในกรณีคำนวณด้วยมือ สำหรับตัวอย่างของการวิเคราะห์ความแปรปรวนจะนำเสนอในตัวอย่าง

ตารางสรุป ANOVA

ก่อนหน้านี้ได้แบ่งส่วน sum of squares แล้ว ขั้นตอนถัดไปจะเป็นการสร้างตารางสรุป ANOVA มีจุดมุ่งหมายเพื่อให้ง่ายในการสรุปผลการวิเคราะห์ความแปรปรวน รูปแบบโดยทั่วไปของตารางสรุปจะแสดงในตาราง 2 สดมภ์แรกเป็นแหล่งความแปรปรวนในโมเดล ในโมเดลหนึ่งองค์ประกอบ ความแปรปรวนรวมจะถูกแบ่งออกเป็นความแปรปรวนระหว่างกลุ่มและความแปรปรวนภายในกลุ่ม ในสดมภ์ที่สองเป็นผลรวมกำลังสอง (sum of squares) ในแต่ละแหล่ง

ตาราง 2 ตารางสรุปผลการวิเคราะห์ความแปรปรวน

แหล่งความแปรปวน	SS	Df	MS	F
ระหว่างกลุ่ม	$SS_{between}$	J - 1	$MS_{between}$	$MS_{between}$/ MS_{within}
ภายในกลุ่ม	SS_{within}	N - J	MS_{within}	
รวม	SS_{total}	N - 1		

สำหรับสดมภ์ที่สามจะเป็นองศาแห่งความเป็นอิสระ (degrees of freedom) ในแต่ละแหล่ง สำหรับแหล่งความแปรปรวนระหว่างกลุ่ม โดยนิยามเป็นความเบี่ยงเบนของค่าเฉลี่ยในแต่ละกลุ่มจากค่าเฉลี่ยทั้งหมด หากมีค่าเฉลี่ย J กลุ่มแล้ว $df_{between}$ จะต้องเท่ากับ J - 1 ทำไมเป็นเช่นนี้ ถ้าค่าเฉลี่ย J กลุ่มและเรารู้ค่าเฉลี่ยทั้งหมดแล้ว จะแค่ J - 1 ค่าเท่านั้นที่สามารถแปรค่าได้อย่างอิสระ สำหรับแหล่งความแปรปรวนภายในกลุ่ม เป็นความเบี่ยงเบนจากค่าคะแนนแต่ละค่าจากค่าเฉลี่ยของกลุ่ม นั้นคือ ค่าคะแนน n ค่าจากแต่ละกลุ่ม จะได้องศาแห่งความเป็นอิสระ n - 1 สำหรับแต่ละกลุ่ม และมีทั้งหมด J กลุ่ม แล้ว องศาแห่งความเป็นอิสระของ df_{within} จะเท่ากับ J(n - 1) หรือเท่ากับ N - J สำหรับแหล่งความแปรปรวนรวมเป็นความเบี่ยงเบนจากค่าคะแนนแต่ละค่าจากค่าเฉลี่ยรวมทั้งหมด ซึ่งค่าคะแนนมีทั้งหมด N ค่า ดังนั้น df_{total} จึงเป็น N - 1 ทั้งนี้เพราะว่าค่าสังเกตทั้งหมดมี N ค่า และเรารู้ค่าเฉลี่ยรวมทั้งหมดแล้ว จะมีแค่เพียง N - 1 ค่าเท่านั้นที่เป็นอิสระจะเป็นค่าใด ๆ ก็ได้ แต่จะเหลืออีก 1 ค่าที่จะต้องเป็นค่าเพียงค่าเดียวที่ไม่อิสระ

ทำไมต้องสนใจจำนวนขององศาแห่งความเป็นอิสระในการวิเคราะห์ความแปรปรวน คำตอบของคำถามนี้พิจารณาตามข้อสนับสนุนต่อไปนี้ คือมีนักวิจัยสองคนที่มีการศึกษาคล้ายคลึงกัน นักวิจัย A ใช้กลุ่มตัวอย่าง 20 คนต่อกลุ่มและนักวิจัย B ใช้กลุ่มตัวอย่าง 10 คนต่อกลุ่ม นักวิจัยแต่ละคนมีค่า SS_{within} เท่ากับ 15 เหมือนกัน แล้วจะบอกได้ไหมว่าการวิจัยทั้งสองนี้ให้ผลเหมือนกัน คงไม่เหมือนกันแน่ การเปรียบเทียบแบบนี้คงจะไม่ได้เพราะว่า SS_{within} จะถูกอิทธิพลของจำนวนค่าสังเกตต่อกลุ่มทำให้ไม่เท่ากัน การเปรียบเทียบที่ถูกต้องควรจะถ่วงน้ำหนักของ SS_{within} ด้วยจำนวนขององศาแห่งความเป็นอิสระ ทำนองเดียวกันก็คงจะไม่ยุติธรรมนักในการเปรียบเทียบ $SS_{between}$ จากงานวิจัยทั้งสองนี้บนพื้นฐานของจำนวนกลุ่มตัวอย่างต่อกลุ่มที่แตกต่างกัน นั้นควรจะต้องมีการถ่วงน้ำหนัก $SS_{between}$ โดยใช้จำนวนขององศาแห่งความเป็นอิสระ วิธีการถ่วงน้ำหนัก sum of squares โดยการนำจำนวนองศาแห่งความเป็นอิสระไปหาร จะได้ค่าเฉลี่ยกำลังสอง (mean squares) ดังนั้น $MS_{between} = SS_{between}/df_{between}$ และ $MS_{within} = SS_{within}/df_{within}$ ซึ่งจะแสดงในสดมภ์ที่ 4 ของตาราง 2 ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยที่เกิดจากการรวมกันแล้วถูกถ่วงน้ำหนักด้วยจำนวนของค่าสังเกตที่นำมาใช้ในการรวม ค่าเฉลี่ยกำลังสอง (mean squares) จะนำมาประมาณค่าความแปรปรวน เพราะว่าเหมือนกับความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่าง (s^2) ซึ่งจะนำเสนอเป็นผลรวมกำลังสองที่เบี่ยงเบนไปจากค่าเฉลี่ยแล้วหารด้วยองศาแห่งความเป็นอิสระ

สดมภ์สุดท้ายในตารางสรุป ANOVA คือค่า F คือสถิติทดสอบสรุปสุดท้าย โดยค่า F จะคำนวณโดยใช้อัตราส่วนของค่าเฉลี่ยกำลังสองทั้งสองค่า ดังนั้นในกรณี one-way ANOVA ที่เป็นโมเดล fixed-effects ค่า F จะคำนวณได้เท่ากับ $F = MS_{between}/MS_{within}$ ซึ่งเป็นสูตรที่พัฒนาโดย Sir Ronald A. Fisher ในปี 1920 สถิติทดสอบนี้เป็นสถิติดั้งเดิมของอัตราส่วนความแปรปรวน เพราะว่ามันจะแสดงถึงอัตราส่วนของความแปรปรวน 2 ค่า ต่อไปอัตราส่วนความแปรปรวนจะเปลี่ยนชื่อใหม่เรียกว่าอัตราส่วน F โดย George W. Snedecor (ผู้ที่คิดคำนวณตารางค่า F)

อัตราส่วน F จะบอกถึงปริมาณของความแปรปรวนระหว่างกลุ่มที่มากกว่าความแปรปรวนภายในกลุ่ม ซึ่งกรณีที่เป็นการปฏิเสธ H_0 ต้องมีความแปรปรวนระหว่างกลุ่มมากกว่าความแปรปรวนภายในกลุ่ม แล้ว $MS_{between}$ ควรจะต้องมากกว่า MS_{within} ผลของอัตราส่วน F จะมีค่ามากกว่า 1 สำหรับกรณีที่ปริมาณความแปรปรวนระหว่างกลุ่มเท่ากับความแปรปรวนภายในกลุ่มแล้วอัตราส่วน F จะมีค่าเท่ากับ 1 ดังนั้นเราต้องการค่า F ที่มาก เพื่อที่จะปฏิเสธ H_0 สถิติ F-test จะถูกนำไปเปรียบเทียบกับค่าวิกฤติ F จากตารางสถิติ ค่าวิกฤติสามารถเปิดได้จากตารางที่ ${}_{(1-\alpha)}F_{(J-1,N-J)}$ และองศาแห่งความเป็นอิสระก็คือ $df_{between}$ และ df_{within} สมมติฐานศูนย์จะถูกปฏิเสธถ้าค่าสถิติ F-test มีค่ามากกว่าค่าวิกฤติ F

ถ้าค่าสถิติ F-test มีค่ามากกว่าค่าวิกฤติ F และจำนวนกลุ่มที่ทดสอบมีมากกว่า 2 กลุ่มแล้ว จะยังไม่ชัดเจนถึงความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของแต่ละกลุ่ม ในกรณีนี้ ต้องมีการเปรียบเทียบพหุคูณ (Multiple comparison) เพื่อเปรียบเทียบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเป็นรายคู่ ซึ่งจะได้กล่าวถึงต่อไป เมื่อมีการทดสอบจำนวนกลุ่มเพียง 2 กลุ่ม มักจะหลีกเลี่ยงการวิเคราะห์

ที่ยากและไปใช้การวิเคราะห์ที่ง่ายกว่าคือ t-test สถิติ F-test และ t-test มีความสัมพันธ์กันคือ F $= t^2$

โมเดลของ ANOVA

ในหัวข้อนี้จะแนะนำโมเดลเชิงเส้นของการวิเคราะห์ความแปรปรวน การประมาณค่าพารามิเตอร์ในโมเดล ความหลากหลายของการวัดความสัมพันธ์ระหว่าง X และ Y และสุดท้ายคือตัวอย่างการคำนวณ

โมเดล ANOVA

โมเดลการวิเคราะห์ความแปรปรวนเป็นโมเดลเชิงเส้นคล้ายกับโมเดลการถดถอยพหุคูณและโมเดลการถดถอยอย่างง่าย โมเดลการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบหนึ่งตัวประกอบที่เป็น fixed-effect สามารถเขียนในเทอมของพารามิเตอร์ได้ว่า

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij}$$

เมื่อ Y คือคะแนนสังเกตบนตัวแปรเกณฑ์สำหรับคนที่ i ในกลุ่มที่ j, μ คือค่าเฉลี่ยของประชากรทั้งหมด, α_j คืออิทธิพลของกลุ่ม j และ ε_{ij} คือความคลาดเคลื่อนของคนที่ i ในกลุ่มที่ j ความคลาดเคลื่อนสามารถได้มาจากความแตกต่างระหว่างบุคคล ความคลาดเคลื่อนในการวัด หรือ องค์ประกอบอื่น ๆ หรืออิทธิพลที่ไม่สามารถตรวจสอบได้ (อิทธิพลจากตัวแปรอื่น ๆ นอกเหนือจาก X) อิทธิพลของกลุ่มและความคลาดเคลื่อนสามารถคำนวณได้ว่า

$$\alpha_j = \mu_j - \mu$$

และ

$$\varepsilon_{ij} = Y_{ij} - \mu_j$$

ตามลำดับ นั่นคือ อิทธิพลของกลุ่มจะเท่ากับความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของประชากรในกลุ่ม j และค่าเฉลี่ยของประชากรทั้งหมด ในขณะเดียวกัน ความคลาดเคลื่อนเท่ากับความแตกต่างระหว่างคะแนนสังเกตของแต่ละคนกับค่าเฉลี่ยของประชากรในกลุ่ม j ความคลาดเคลื่อนในการวิเคราะห์ความแปรปรวนคล้ายกับความคลาดเคลื่อนในการวิเคราะห์การถดถอย หรือก็คือความแปรปรวนใน Y ที่ไม่สามารถอธิบายได้ด้วย X

เงื่อนไขพิเศษของโมเดล ในกรณีที่แต่ละกลุ่มมีจำนวน n เท่ากันแล้วมีเงื่อนไขว่า

$$\Sigma\alpha_j = 0$$

ผลรวมนี้จะรวมตั้งแต่ j = 1, …, J ดังนั้นผลรวมอิทธิพลของกลุ่มจะเท่ากับศูนย์ ในการประยุกต์ใช้นี้ถ้าอิทธิพลของกลุ่มไม่เป็นศูนย์แล้ว อิทธิพลของกลุ่มจะสมดุลกันรอบ ๆ ศูนย์ นั่นคือจะมีบางค่าเป็นบวก และบางค่าเป็นลบ อิทธิพลของกลุ่มที่เป็นบวกจะเป็นกลุ่มที่ค่าเฉลี่ยสูงกว่าค่าเฉลี่ยรวม สำหรับกลุ่มที่มีอิทธิพลของกลุ่มมีค่าเป็นลบจะเป็นที่มีค่าเฉลี่ยต่ำกว่าค่าเฉลี่ยรวม

การประมาณค่าพารามิเตอร์ของโมเดล

การประมาณค่าพารามิเตอร์ของโมเดล μ, α_j และ ε_{ij} การประมาณค่าจะใช้วิธีกำลังสองต่ำสุด วิธีกำลังสองต่ำสุด (least squares) เป็นวิธีทั่วไปที่นิยมใช้สำหรับโมเดลเชิงเส้น (เช่น การถดถอย การวิเคราะห์ความแปรปรวน ฯลฯ) การประมาณค่าจากกลุ่มตัวอย่างนิยมใช้ $\bar{Y}_{..}$, a_j และ e_{ij} ตามลำดับ ซึ่งสองตัวสามารถคำนวณได้จาก

$$a_j = \bar{Y}_j - \bar{Y}_{..}$$

และ

$$e_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_{.j}$$

ตามลำดับ สัญลักษณะ $\bar{Y}_{..}$ แทนค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างโดยรวมทั้งหมด สำหรับตัวห้อยที่เป็นจุดสองจุดนั้นจะสามารถเฉลี่ยของทั้งคู่ของ i และ j และ $\bar{Y}_{.j}$ แทนค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างสำหรับกลุ่ม j ซึ่งจุดตัวแรกจะเป็นการคำนวณสำหรับทุก i ในกลุ่ม j สำหรับ one-factor ANOVA fixed-model สามารถเขียนในเทอมของสถิติของกลุ่มตัวอย่างได้ว่า

$$Y_{ij} = \bar{Y}_{..} + a_j + e_{ij}$$

การวัดความสัมพันธ์

มีการวัดความสัมพันธ์มากมายสำหรับความสัมพันธ์ระหว่าง X และ Y หรือความสัมพันธ์ของอิทธิพลที่มีต่อกลุ่ม ซึ่งจะใช้สัญลักษณ์ η^2, adjusted η^2 หรือ ε^2, ω^2 เป็นการวัดขนาดอิทธิพล แม้ว่าจะมีการทดสอบนัยสำคัญสำหรับการวัดแต่ละตัว ซึ่งไม่จำเป็นเพราะว่านัยสำคัญจะถูกประเมินโดย F-test ในการวิเคราะห์ความแปรปรวน

สำหรับในการวัดแต่ละตัว จะสมมติว่าความแปรปรวนระหว่างกลุ่มเท่ากัน ประการแรกเรามี η^2 เป็นอัตราส่วนความสัมพันธ์ ซึ่งแสดงด้วยสัดส่วนของความแปรปรวนใน Y ที่ถูกอธิบายด้วยความแตกต่างระหว่างกลุ่ม (เช่น X) เราสามารถคำนวณ η^2 ได้ด้วย

$$\eta^2 = SS_{between}/SS_{total}$$

สถิตินี้มีแนวคิดคล้ายกับสถิติ R^2 ที่ใช้ในการวิเคราะห์การถดถอย

และ R^2 และ η^2 จะเป็นสถิติที่ลำเอียงทางบวก (ประมาณค่าความสัมพันธ์ได้สูงเกินจริง) ความลำเอียงเกิดได้เมื่อจำนวนกลุ่มตัวอย่างน้อยกว่า 30 ดังนั้น จึงมีการปรับแก้ η^2 รู้จักกันในนามของ adjusted η^2 หรือ ε^2 และคำนวณได้ด้วย

$$\varepsilon^2 = 1 - [MS_{within}/MS_{total}]$$

เมื่อ $MS_{total} = (SS_{total}/df_{total})$ การวัดนี้ (ε^2) จะไม่ได้รับอิทธิพลจากขนาดกลุ่มตัวอย่างและไม่เกี่ยวข้องกับความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน

การวัดอื่น ๆ ของความสัมพันธ์ระหว่าง X และ Y มีสถิติ ω^2 ซึ่งไม่ได้รับอิทธิพลจากขนาดกลุ่มตัวอย่าง เราสามารถคำนวณได้ด้วย

$$\omega^2 = [SS_{between} - (J - 1)MS_{within}]/[SS_{total} + MS_{within}]$$

ดังนั้นคำแนะนำที่ปลอดภัยในการใช้ ε^2 หรือ ω^2 คือผลที่ลำเอียงจากขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่ไม่แน่ชัด ในการตัดสินใจระหว่าง ε^2 และ ω^2 ที่นิยมมากและมีแนวโนมใช้กันมากในการออกแบบโมเดล ANOVA คือ ω^2 ที่ใช้รายละเอียดของแต่ละกลุ่มในการวัดความสัมพันธ์ นอกจากนี้ยังไม่มีเกณฑ์สำหรับการแปลความหมายขนาดของสถิติโดยเฉพาะ สเกลในเชิงทฤษฎีจาก 0 (ไม่มีความสัมพันธ์) จนถึง 1 (มีความสัมพันธ์อย่างสมบูรณ์) ขึ้นอยู่กับนักวิจัยในแต่ละศาสตร์ทางการวิจัยที่จะแปลความหมายขนาดของการวัดที่ได้จากการเปรียบเทียบผลลัพธ์แต่ละผลลัพธ์ที่ได้จากการศึกษาทำนองเดียวกัน

ตัวอย่างคำนวณ

พิจารณาตัวอย่างปัญหาในหัวข้อนี้ เรามีตัวแปรตามคือระยะเวลาที่ใช้ในห้องแล็บใน 1 ภาคเรียน และตัวแปรอิสระคือ ผู้สอนแล็บ (ให้ผู้สอนแต่ละคนเท่าเทียมกันในเรื่องของเพศและความสามารถ) ดังนั้น ผู้วิจัยสนใจเกี่ยวกับผู้สอนแล็บว่าจะมีผลต่อระยะเวลาที่ใช้ในห้องแล็บหรือไม่ โดยแบ่งออกเป็น 4 กลุ่มคือ 1) ไม่มีผู้สอนแล็บ 2) ผู้สอนที่ใช้เวลาสอนเล็กน้อย 3) ผู้สอนที่ใช้เวลาสอนปานกลาง และ 4) ผู้สอนที่ใช้เวลาสอนมาก นักเรียนถูกสุ่มเข้ากลุ่มตั้งแต่เริ่มต้นเรียนและเข้าแล็บตามผู้สอนแต่ละคน โดยมีนักเรียน 8 คนในแต่ละกลุ่ม รวมทั้งหมด 32 คน ผลของระยะเวลาที่ใช้ในห้องแล็บปรากฏดังตาราง 3 โดยจะคำนวณค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน ของแต่ละกลุ่มและรวม และสรุปผลการคำนวณด้วยผลรวมกำลังสอง (sum of squares)

ตาราง 3 ข้อมูลและสรุปค่าสถิติสำหรับระยะเวลาที่ใช้ในห้องแล็บ

	ระยะเวลาที่ใช้ในห้องแล็บ			
	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3	กลุ่ม 4
	15	20	10	30
	10	13	24	22
	12	9	29	26
	8	22	12	20
	21	24	27	29
	7	25	21	28
	13	18	25	25
	3	12	14	15
ΣY_{ij}	89	143	162	195
$\overline{Y}_j$	11.13	17.88	20.25	24.38
S_j^2	30.13	35.27	53.07	25.98

$\overline{Y}_{..} = 18.41$; $S^2_{..} = 56.44$

$\Sigma_j(\Sigma_i Y_{ij})^2 = (89)^2 + (143)^2 + (162)^2 + (195)^2 = 92639$

$\Sigma_i\Sigma_j Y_{ij}^2 = 12591$; $(\Sigma_i\Sigma_j Y_{ij})^2 = (589)^2 = 346921$

คำนวณตามกระบวนการวิเคราะห์ความแปรปรวน โดยเริ่มจากการคำนวณผลรวมกำลังสอง (sums of squares) ได้เท่ากับ

$$SS_{total} = \left[\sum_i^n\sum_j^J Y_{ij}^2 - \left(\sum_i^n\sum_j^J Y_{ij}\right)^2 \Big/ N\right]$$

$$= 12591 - (346921/32)$$

$$= 1749.72$$

$$SS_{between} = \left[\sum_i^n\left(\sum_j^J Y_{ij}\right)^2 \Big/ n - \left(\sum_i^n\sum_j^J Y_{ij}\right)^2 \Big/ N\right]$$

$$= (92639/8) - (346921/32)$$

$$= 738.59$$

$$SS_{within} = \left[\sum_i^n\sum_j^J Y_{ij}^2 - \sum_j^J\left(\sum_i^n Y_{ij}\right)^2 \Big/ n\right]$$

$$= 12591 - (92639/8)$$

$$= 1011.13$$

ถัดมาคำนวณหาค่าเฉลี่ยกำลังสอง (mean squares) เท่ากับ

$$MS_{between} = SS_{between}/df_{between} = 738.59/3 = 246.20$$

$$MS_{within} = SS_{within}/df_{within} = 1011.13/28 = 36.11$$

สุดท้ายเราคำนวณหาสถิติ F ได้เท่ากับ

$$F = MS_{between}/MS_{within} = 246.20/36.11 = 6.82$$

สถิติทดสอบจะถูกเปรียบเทียบกับค่าวิกฤตที่เปิดจากตาราง ${}_{0.95}F_{3,28} = 2.95$ ใช้ระดับนัยสำคัญที่ 0.05 สถิติทดสอบมีค่ามากกว่าค่าวิกฤตที่เปิดจากตาราง ดังนั้นเราจะปฏิเสธ H_0 ยอมรับ H_1 และสรุปว่าระดับของผู้สอนมีผลให้ค่าเฉลี่ยแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ สรุปผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนได้ดังตาราง 4

ตาราง 4 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวน

แหล่งความแปรปรวน	SS	Df	MS	F
ระหว่างกลุ่ม	738.59	3	246.20	6.82*
ภายในกลุ่ม	1011.13	28	36.11	
รวม	1749.72	31		

$^{*}{}_{0.95}F_{3,28} = 2.95$

ถัดไปเป็นการประมาณค่าอิทธิพลของกลุ่มและความคลาดเคลื่อน อิทธิพลของกลุ่มประมาณค่าได้จาก

$$a_1 = \overline{Y}_{.1} - \overline{Y}_{..} = 11.13 - 18.41 = -7.28$$
$$a_2 = \overline{Y}_{.2} - \overline{Y}_{..} = 17.88 - 18.41 = -0.53$$
$$a_3 = \overline{Y}_{.3} - \overline{Y}_{..} = 20.28 - 18.41 = +1.84$$
และ $$a_4 = \overline{Y}_{.4} - \overline{Y}_{..} = 24.38 - 18.41 = +5.97$$

แสดงให้เห็นว่า ผลรวมของอิทธิพลกลุ่มเท่ากับ 0 (ตามเงื่อนไข $\Sigma a_j = 0$) ในเนื้อหาถัดไปจะใช้ข้อมูลเดียวกันในการวิเคราะห์สถิติโดยใช้กระบวนการเปรียบเทียบพหุคูณ (multiple comparison procedures) ซึ่งเป็นการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยรายคู่ ความคลาดเคลื่อนของแต่ละคนในแต่ละกลุ่มแสดงในตาราง 5 และสามารถบอกได้ว่าผลรวมของความคลาดเคลื่อนมีค่าเป็นศูนย์ ($\Sigma_i \Sigma_j e_{ij} = 0$) และค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนมีค่าเป็นศูนย์ ($\bar{e} = 0$)

สุดท้ายเราจะประมาณค่าการวัดความสัมพันธ์ โดยในเบื้องต้นเราจะคำนวณอัตราส่วนความสัมพันธ์ η^2 จะได้

$$\eta^2 = SS_{between}/SS_{total} = 738.59/1749.72 = 0.42$$

ถัดมาคำนวณ ε^2 ได้ดังนี้

$$\varepsilon^2 = 1 - [MS_{within}/(SS_{total}/df_{total})]$$
$$= 1 - [36.11/(1749.72/31)]$$
$$= 0.36$$

ตาราง 5 ความคลาดเคลื่อนของกลุ่มตัวอย่างในแต่ละกลุ่ม

กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3	กลุ่ม 4
3.88	2.13	-10.25	5.63
-1.13	-4.88	3.75	-2.38
0.88	-8.88	8.75	1.63

กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3	กลุ่ม 4
-3.13	4.13	-8.25	-4.38
9.88	6.13	6.75	4.63
-4.13	7.13	0.75	3.63
1.88	0.13	4.75	0.63
-8.13	-5.88	-6.25	-9.38

$\Sigma_i\Sigma_j e_{ij} = 0.00$

สุดท้ายเราจะคำนวณ ω^2 ได้ว่า

$$\begin{aligned}\omega^2 &= [SS_{between} - (J - 1)MS_{within}]/[SS_{total} + MS_{within}] \\ &= [738.59 - (3)36.11]/[1749.72 + 36.11] \\ &= 0.35\end{aligned}$$

พื้นฐานบนการวัดความสัมพันธ์และปราศจากความรู้ของการวิจัยอื่น ๆ ที่เกี่ยวกับผู้สอนอาจจะสรุปว่ามีบางหลักฐานของความสัมพันธ์ระหว่างผู้สอนและระยะเวลาที่ใช้แล็บ เราสามารถเรียบลำดับค่าเฉลี่ยของกลุ่มจากกลุ่มที่มีค่าเฉลี่ยน้อยไปยังกลุ่มที่มีค่าเฉลี่ยมาก ดังนั้นความสัมพันธ์อาจอธิบายได้ว่า ผู้สอนที่ใช้เวลาสอนนานจะมีแนวโน้มที่นักเรียนจะเข้าใช้แล็บนานกว่า

ข้อตกลงเบื้องต้นและการละเมิดข้อตกลงเบื้องต้นทางสถิติ

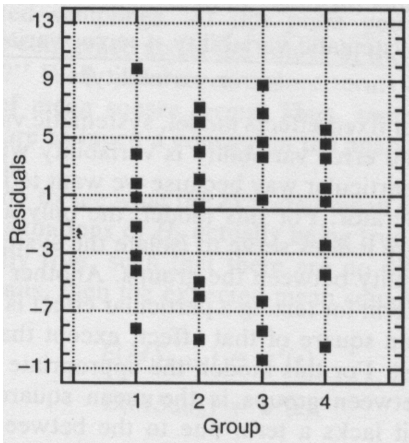
สำหรับข้อตกลงเบื้องต้นของการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบหนึ่งองค์ประกอบจะมีข้อตกลงที่เกี่ยวข้องดังนี้

1. ความคลาดเคลื่อนเป็นไปอย่างสุ่มและเป็นอิสระต่อกัน

ข้อตกลงเบื้องต้นของการแจกแจงของความคลาดเคลื่อนคือ 3 ประการที่เกี่ยวข้องกับความคลาดเคลื่อน ε_{ij} ประการแรก ความคลาดเคลื่อนจะสมมติว่าเป็นไปอย่างสุ่มและมีอิสระจากกัน นั่นคือ ไม่เป็นความคลาดเคลื่อนที่เกิดอย่างเป็นระบบและความคลาดเคลื่อนแต่ละตัวเป็นอิสระจากกัน

การใช้กลุ่มที่ความคลาดเคลื่อนเป็นอิสระจากกันมีความสำคัญในการวิเคราะห์ความแปรปรวน อัตราส่วน F จะไวมากต่อการละเมิดข้อตกลงเบื้องต้นและจะส่งผลให้เกิด Type I และ/หรือ Type II error เพิ่มมากขึ้น การละเมิดข้อตกลงเบื้องต้นของความอิสระของความคลาดเคลื่อนอาจจะส่งผลต่อความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ย ในจุดประสงค์หนึ่งของความคลาดเคลื่อนในแต่ละตัวอย่างในกลุ่มที่เป็นอิสระจากกัน (ε_{ij}) ถ้าแต่ละตัวอย่างที่ได้มาเป็นไปอย่างสุ่มแล้ว ข้อตกลงเบื้องต้นของความเป็นอิสระของความคลาดเคลื่อนก็ควรจะเป็นจริง

กระบวนการง่ายที่สุดสำหรับการประเมินความเป็นอิสระของความคลาดเคลื่อนโดยการนำมาพล็อตกราฟ ถ้าข้อตกลงเบื้องต้นเป็นจริงแล้ว ความคลาดเคลื่อนจะตกลงอย่างสุ่มสำหรับแต่ละกลุ่ม ถ้าข้อตกลงเบื้องต้นถูกละเมิดแล้วความคลาดเคลื่อนจะตกลงอย่างเป็นระเบียบ สถิติ Durbin-Watson สามารถใช้ในการทดสอบ Autocorrelation สำหรับการละเมิดข้อตกลงเบื้องต้นนี้ไม่ง่ายที่จะแก้ไข ไม่ว่าจะเป็นการใช้การแปลงข้อมูลหรือการทดสอบแบบนอนพาราเมตริก (nonparametric) ตัวอย่างของความคลาดเคลื่อนที่แสดงด้วยแผนภาพในภาพประกอบ 2 และบ่งชี้ว่าความคลาดเคลื่อนเป็นไปอย่างสุ่มในแต่ละกลุ่ม



ภาพประกอบ 2 พล็อตความคลาดเคลื่อนสำหรับแต่ละกลุ่ม

2. ความเป็นเอกพันธ์ของความแปรปรวน (Homogeneity of Variance)

ส่วนที่สองของข้อตกลงเบื้องต้น การแจกแจงของความคลาดเคลื่อนของแต่ละกลุ่มจะมีความแปรปรวนคงที่ (σ^2_{res}) มีอยู่เสมอที่อ้างอิงว่าเป็นข้อตกลงเบื้องต้นของความเป็นเอกพันธ์ของแปรปรวน (homogeneity of variance or Homoscedasticity) เมื่อ homoscedasticity หมายถึง กระจายเหมือนกัน (same scatter) ในอีกกรณีหนึ่งสำหรับทุกค่าของ X (ในแต่ละกลุ่ม) การแจกแจงอย่างมีเงื่อนไขของความคลาดเคลื่อนจะมีความแปรปรวนเหมือนกัน ถ้าสองส่วนแรกของข้อตกลงเบื้องต้นเป็นจริงแล้ว s^2_{res} จะเป็นตัวประมาณค่าที่ไม่ลำเอียงของความแปรปรวนของคลาดเคลื่อน (σ^2_{res}) สำหรับแต่ละกลุ่ม

การละเมิดข้อตกลงเบื้องต้นนี้อาจจะนำไปสู่ความลำเอียงในการประมาณค่า SS_{within} จะเป็นการเพิ่มอัตรา Type I error และเป็นไปได้ที่จะเพิ่มอัตรา Type II error อิทธิพลของการละเมิดดูเหมือนจะน้อยเมื่อแต่ละกลุ่มมีจำนวนตัวอย่างเท่ากันหรือใกล้เคียงกันมาก (ความใกล้เคียงกัน คือ แตกต่างกันไม่เกินครึ่งหนึ่ง หรือคิดเป็นอัตราส่วนกลุ่มใหญ่ต่อกลุ่มเล็กคือ 1.5) ซึ่งความแปรปรวนควรจะเท่ากันเมื่อกลุ่มตัวอย่างเท่ากัน

วิธีหนึ่งสำหรับการค้นหาการละเมิดข้อตกลงเบื้องต้นของความเป็นเอกพันธ์ของความแปรปรวนโดยการใช้การทดสอบทางสถิติ เช่น Harley's F-max test (สำหรับกลุ่มตัวอย่างแต่ละ

กลุ่มมีจำนวนเท่ากัน แต่ไวต่อความไม่เป็นโค้งปกติ) Cochran's test (สำหรับกลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มมีจำนวนเท่ากันแต่ไวต่อความไม่เป็นโค้งปกติมากกว่า Harley's F-max test) Bartlett test (สำหรับกลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มมีจำนวนไม่เท่ากัน แต่ไวมากที่สุดต่อความไม่เป็นโค้งปกติ) The Box-Scheffe-Anderson test (สำหรับกลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มไม่เท่ากัน และมีความแกร่งต่อความไม่เป็นโค้งปกติ) และ The Browne-Forsythe test (สำหรับกลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มไม่เท่ากัน และมีความแกร่งต่อความไม่เป็นโค้งปกติมากกว่า The Box-Scheffe-Anderson test) โดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการวิเคราะห์ทางสถิติจะรวมสถิติเหล่านี้อยู่ด้วยแล้ว

ในสถานการณ์ที่มีการละเมิดข้อตกลงเบื้องต้นของความเป็นเอกพันธ์ของความแปรปรวน ควรจะใช้การแปลงรูปความแปรปรวน (เช่น $\sqrt{Y}$, $1/Y$ หรือ log Y) หรือใช้โมเดล ANOVA อื่น ๆ ที่ไวน้อยต่อความแปรปรวนที่ไม่เท่ากัน เช่น ใช้สถิตินอนพาราเมตริกอย่าง Kruskal-Wallis procedure หรือ สถิติ F-test ที่มีการปรับแก้ (modifications of the parametric F-test)

สำหรับตัวอย่างในภาพประกอบ 2 ที่มีการพล็อตความคลาดเคลื่อนจะแสดงถึงความแปรปรวนของแต่ละกลุ่มที่สอดคล้องกัน กลุ่มแต่ละกลุ่มมีจำนวนเท่ากัน ดังนั้นอาจใช้การทดสอบทางสถิติที่มีความเหมาะสมสำหรับกรณีที่กลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มเท่ากัน (เช่น Hartley's และ Cochran's test ฯ ซึ่งผลการทดสอบควรจะไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ)

3. ความเป็นโค้งปกติ (Normality)

ส่วนสุดท้ายของข้อตกลงเบื้องต้นเป็นเงื่อนไขของการแจกแจงของความคลาดเคลื่อนที่จะต้องเป็นโค้งปกติ นั่นคือ สำหรับทุกค่าของ X ความคลาดเคลื่อนต้องมีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ F-test มีความสัมพันธ์อย่างมากกับการละเมิดข้อตกลงเบื้องต้นข้อนี้ (มีผลต่ออัตราการเกิด Type I และ Type II error) การละเมิดข้อตกลงเบื้องต้นของการแจกแจงปกติจะมีน้อยในกลุ่มตัวอย่างที่มีขนาดใหญ่ (โดยปกติจะมีกลุ่มตัวอย่าง 25 คนต่อหนึ่งกลุ่ม) กับแต่ละกลุ่มมีจำนวนกลุ่มตัวอย่างเท่ากัน และการแจกแจงของประชากรมีความเป็นเอกพันธ์กัน การเบ้จะมีอิทธิพลน้อยมากกับการเกิด Type I และ Type II error เมื่อการแจกแจงมีลักษณะสูงโด่ง (leptokurtosis) หรือแบนราบ (platykurtosis) มีอิทธิพลต่ออัตราการเกิด Type I และ Type II error บ้าง การละเมิดข้อตกลงเบื้องต้นนี้อาจจะมีผลมาจากการเกิดค่าสังเกตบางค่าที่ผิดปกติไปจากกลุ่ม วิธีง่าย ๆ ในการค้นหาค่าที่ผิดปกติคือการสังเกตจากความคลาดเลื่อนมาตรฐานและค่าเฉลี่ยของกลุ่มที่มีค่าผิดปกติอย่างมาก

เทคนิคทางกราฟฟิคสามารถใช้ค้นหาการละเมิดข้อตกลงเบื้องต้นของความเป็นโค้งปกติได้คือ 1) แจกแจงความถี่ของความคลาดเคลื่อนสำหรับแต่ละกลุ่ม (อาจใช้ stem-and-leaf plots, box plots หรือ Histograms) หรือ 2) พล็อตค่าความเบี่ยงเบนจากค่าเฉลี่ยของกลุ่มสำหรับทุกค่าสังเกต หรือ 3) พล็อตค่าเฉลี่ยของกลุ่มกับความแปรปรวนของกลุ่ม นอกจากนี้ยังมี

วิธีการทางสถิติที่หลากหลายสำหรับการค้นหาความไม่เป็นโค้งปกติ (เช่น การทดสอบ the Shapiro-Wilk test)

การแปลงรูปสามารถใช้ได้สำหรับทำให้ข้อมูลเป็นโค้งปกติ นอกจากนี้ ความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นเส้นตรงระหว่างตัวแปร 2 ตัวอาจนำไปสู่การละเมิดข้อตกลงเบื้องต้นของความเป็นโค้งปกติ

ในข้อมูลตัวอย่าง ความคลาดเคลื่อนแสดงในตาราง 2 ปรากฏลักษณะเป็นการแจกแจงแบบโค้งปกติ สถิติความโด่งสำหรับความคลาดเคลื่อนทั้งหมดคือ -1.02 เป็นตัวบ่งชี้ถึงความแบนราบของการแจกแจง

สำหรับตัวอย่างการคำนวณที่นำเสนอไปนั้นแม้ว่าขนาดของกลุ่มตัวอย่างจะมีขนาดเล็ก และข้อตกลงเบื้องต้นทั้งหมดนั้นก็พอเพียง โปรแกรมสำเร็จรูปสำหรับการวิเคราะห์สถิติ และข้อตกลงเบื้องต้นสามารถวิเคราะห์ได้ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ตาราง 6 ข้อตกลงเบื้องต้นและผลของการละเมิดข้อตกลงเบื้องต้น

ข้อตกลงเบื้องต้น	**ผลของการละเมิดข้อตกลงเบื้องต้น**
1. ความเป็นอิสระของความคลาดเคลื่อน	เพิ่มอัตราการเกิด Type I และ/หรือ Type II error ในสถิติ F, มีผลต่อความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ย
2. ความเป็นเอกพันธ์ของความแปรปรวน	เกิดความลำเอียงใน SS_{within} , เพิ่มอัตราการเกิด Type I และ/หรือ Type II error, มีผลน้อยกรณีกลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มเท่ากันและมีความแปรปรวนเท่ากันหรือใกล้เคียงกัน, มีผลน้อยถ้าหากมีจำนวนตัวอย่างแต่ละกลุ่มเพิ่มมากขึ้น
3. ความเป็นโค้งปกติของความคลาดเคลื่อน	มีผลน้อยเมื่อจำนวนตัวอย่างแต่ละกลุ่มมีขนาดใหญ่ และมีจำนวนเท่ากันหรือใกล้เคียงกันในแต่ละกลุ่ม, และมีความเป็นเอกพันธ์ของการแจกแจงข้อมูลในแต่ละกลุ่ม

กระบวนการวิเคราะห์ที่ใช้เมื่อ n ไม่เท่ากัน

จนถึงจุดนี้ ก่อนหน้านี้เป็นการพิจารณาเฉพาะกรณีที่ n แต่ละกลุ่มเท่ากัน นั่นคือโมเดลที่ใช้จะมีจำนวนของค่าสังเกตในแต่ละกลุ่มเท่ากัน ในกรณีนี้จะให้สูตรและสมการง่ายเข้า อย่างไรก็ตาม เป็นไปได้ว่า n อาจจะไม่ต้องเท่ากันเสมอไป ในหัวข้อนี้จะนำเสนอการคำนวณกรณีที่ n แต่ละกลุ่มไม่เท่ากัน

เงื่อนไขจะกลายเป็น

$$\Sigma n_j \alpha_j = 0$$

ค่าคาดหวังของค่าเฉลี่ยกำลังสองระหว่างกลุ่มคือ

$$E(MS_{between}) = \sigma^2(\varepsilon) + \left[(\Sigma n_j \alpha_j^2)/(J-1)\right]$$

สูตรคำนวณสำหรับผลรวมกำลังสองภายในคือ

$$SS_{within} = \sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{J} Y_{ij}^2 - \sum_{j}^{J}\left[\left(\sum_{i}^{n_j} Y_{ij}\right)^2 \Big/ n_j\right]$$

ขณะที่คำนวณด้วยสูตรสำหรับผลรวมกำลังสองระหว่างกลุ่มคือ

$$SS_{between} = \sum_{j}^{J}\left[\left(\sum_{i}^{n_j} Y_{ij}\right)^2 \Big/ n_j\right] - \left[\left(\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{J} Y_{ij}\right)^2 \Big/ N\right]$$

ซึ่งการวิเคราะห์ ข้อตกลงเบื้องต้นเหมือนกับกรณี n เท่ากัน

ตัวอย่าง สมมติว่าเราได้นำตัวอย่างเดิมคือการใช้เวลาในห้องแล็บ และลบค่าสังเกตแรกออกไปในกลุ่มแรก (คือ Y_{11} = 15 ถูกลบทิ้ง) นี่เป็นการสร้างให้แต่ละกลุ่มมี n ไม่เท่ากัน สรุปผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนแสดงในตาราง 7 กระบวนการคำนวณเกือบทั้งหมดจะเหมือนกันกับกรณีแต่ละกลุ่มมี n เท่ากัน โดยโปรแกรมทางสถิติสามารถวิเคราะห์กรณี n ไม่เท่ากันได้

ตาราง 7 กรณี n ไม่เท่ากันในแต่ละกลุ่ม

$$\sum_{i}\sum_{j} Y_{ij}^2 = 12366$$

$$\left(\sum_{i}\sum_{j} Y_{ij}\right)^2 = (574)^2 = 329476$$

$$\sum_{j}\left[(\sum_{i} Y_{ij})^2 \Big/ n_j\right] = (74)^2/7 + (143)^2/8 + (162)^2/8 + (195)^2/8 = 11372.03$$

$$SS_{total} = \sum_{i}\sum_{j} Y_{ij}^2 - (\sum_{i}\sum_{j} Y_{ij})^2/N = 12366 - (329476/31) = 1737.74$$

$$SS_{between} = \sum_{j}\left[(\sum_{i} Y_{ij})^2/n_j\right] - (\sum_{i}\sum_{j} Y_{ij})^2/N = 11372.04 - (329476/31) = 743.78$$

$$SS_{within} = \sum_{i}\sum_{j} Y_{ij}^2 - \sum_{j}\left[(\sum_{i} Y_{ij})^2/n_j\right] = 12366 - 11372.03 = 993.97$$

แหล่งความแปรปรวน	SS	Df	MS	F
ระหว่างกลุ่ม	743.78	3	247.93	6.73*
ภายในกลุ่ม	993.97	27	36.81	
รวม	1737.74	30		

$^{*}{}_{0.95}F_{3,27} = 2.96$

แปลและเรียบเรียงจาก

Lomax, Richard G. (1992). **Statistical Concepts : A Second Course for Education and the Behavioral Sciences**. London : Lawrence Erlbaum Associates, Inc.