การทดสอบความแตกต่างระหว่างสองกลุ่ม

ฉัตรศิริ ปิยะพิมลสิทธิ์*

1. บทนำ

เมื่อผู้วิจัยได้เก็บรวบรวมข้อมูลหลาย ๆ ตัวแปรจากกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่ม ในการทดสอบความแตกต่างระหว่างกลุ่มทั้งสองนี้ ผู้วิจัยโดยมากจะทดสอบแยกครั้งละตัวแปรโดยใช้สถิติทดสอบที (t-test) ซึ่งผลที่ได้จากการทดสอบจะก่อให้เกิดความน่าจะเป็นในการสรุปผิดพลาดเพิ่มมากขึ้น ลักษณะที่สำคัญของการใช้การทดสอบครั้งละหลายตัวแปรซึ่งแตกต่างไปจากการทดสอบครั้งละตัวแปรนั้นก็เพื่อจะควบคุมอัตราของ Type I error ซึ่ง Type I error ก็คือการพบว่าผลที่ได้มีนัยสำคัญเมื่อสมมติฐานศูนย์เป็นจริง ในการทดสอบตัวแปรเดียวที่ระดับ 5% หมายความว่า มีความน่าจะเป็น 0.95 ที่จะให้ผลไม่มีนัยสำคัญเมื่อประชากรมีค่าเฉลี่ยเท่ากัน ถ้าเราให้ p แทนจำนวนครั้งของการทดสอบที่เป็นอิสระจากกันแล้ว ความน่าจะเป็นที่ผลการคำนวณจะไม่มีนัยสำคัญก็คือ 0.95^p และความน่าจะเป็นที่ผลการคำนวณจะมีนัยสำคัญอย่างน้อย 1 ครั้งก็คือ $1-0.95^p$ ถ้าหากทดสอบหลาย ๆ ครั้ง ความน่าจะเป็นก็จะเพิ่มขึ้น เช่นถ้าเราทดสอบความแตกต่าง 5 ครั้ง (p = 5) ความน่าจะเป็นที่ผลการคำนวณจะมีนัยสำคัญอย่างน้อย 1 ครั้งเท่ากับ $1-0.95^5 = 0.23$ แต่ในการวิเคราะห์ครั้งละตัวแปรโดยปกติแล้วตัวแปรแต่ละตัวจะไม่เป็นอิสระจากกัน ดังนั้น $1-0.95^p$ จึงยังไม่ใช่ค่าความน่าจะเป็นที่ถูกต้องที่ผลการคำนวณจะมีนัยสำคัญอย่างน้อย 1 ครั้ง อย่างไรก็ตามในการทดสอบครั้งละตัวแปรหลาย ๆ ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ผลการคำนวณจะมีนัยสำคัญอย่างน้อย 1 ครั้งก็จะเพิ่มสูงขึ้น

สถิติที่ใช้ทดสอบครั้งละหลายตัวแปร เช่น Hotelling's T^2 Test จะใช้ที่ 5% เป็นระดับนัยสำคัญ ซึ่งก็คือ ความน่าจะเป็น 0.05 จะใช้เป็นขนาดของ Type I error ซึ่งเป็นการปรับแก้ค่าระดับนัยสำคัญโดยการวิเคราะห์ครั้งละหลายตัวเพื่อควบคุมความน่าจะเป็นของ Type I error

ดังนั้นในบทความนี้เราจะแสดงการทดสอบครั้งละหลายตัวแปร เช่น เรามีสมมติฐานว่ากลุ่มประชากร 2 กลุ่มจะมีค่าเฉลี่ยของตัวแปรทั้งหมดเท่ากันหรือไม่ ซึ่งการมีนัยสำคัญของการทดสอบจะเป็นหลักฐานแสดงให้เห็นว่ากลุ่มประชากร 2 กลุ่มจะมีตัวแปรอย่างน้อย 1 ตัวแปรที่มีค่าเฉลี่ยแตกต่างกัน

---

* กศ.ม. (การวัดผลการศึกษา) http://www.watpon.com

ตาราง 1 การวัดร่างกายของนกกระจอกเพศเมีย (X1 = ความยาวตลอดลำตัว, X2 = ขนาดของปีกขณะขยาย, X3 = ความยาวตั้งแต่จงอยปากถึงศีรษะ, X4 = ความยาวของกระดูกต้นแขน, X5 = ความยาวของกระดูกสันหลัง : หน่วยการวัดเป็นมิลลิเมตร) นกตัวที่ 1 ถึง 21 เป็นนกที่รอดชีวิต ส่วนตัวอื่น ๆ คือนกที่เสียชีวิต

ตัวที่	X1	X2	X3	X4	X5
1	156	245	31.6	18.5	20.5
2	154	240	30.4	17.9	19.6
3	153	240	31.0	18.4	20.6
4	153	236	30.9	17.7	20.2
5	155	243	31.5	18.6	20.3
6	163	247	32.0	19.0	20.9
7	157	238	30.9	18.4	20.2
8	155	239	32.8	18.6	21.2
9	164	248	32.7	19.1	21.1
10	158	238	31.0	18.8	22.0
11	158	240	31.3	18.6	22.0
12	160	244	31.1	18.6	20.5
13	161	246	32.3	19.3	21.8
14	157	245	32.0	19.1	20.0
15	157	235	31.5	18.1	19.8
16	156	237	30.9	18.0	20.3
17	158	244	31.4	18.5	21.6
18	153	238	30.5	18.2	20.9
19	155	236	30.3	18.5	20.1
20	163	246	32.5	18.6	21.9
21	159	236	31.5	18.0	21.5
22	155	240	31.4	18.0	20.7
23	156	240	31.5	18.2	20.6
24	160	242	32.6	18.8	21.7
25	152	232	30.3	17.2	19.8

ตาราง 1 (ต่อ)

ตัวที่	X1	X2	X3	X4	X5
26	160	250	31.7	18.8	22.5
27	155	237	31.0	18.5	20.0
28	157	245	32.2	19.5	21.4
29	165	245	33.1	19.8	22.7
30	153	231	30.1	17.3	19.8
31	162	239	30.3	18.0	23.1
32	162	243	31.6	18.8	21.3
33	159	245	31.8	18.5	21.7
34	159	247	30.9	18.1	19.0
35	155	243	30.9	18.5	21.3
36	162	252	31.9	19.1	22.2
37	152	230	30.4	17.3	18.6
38	159	242	30.8	18.2	20.5
39	155	238	31.2	17.9	19.3
40	163	249	33.4	19.5	22.8
41	163	242	31.0	18.1	20.7
42	156	237	31.7	18.2	20.3
43	159	238	31.5	18.4	20.3
44	161	245	32.1	19.1	20.8
45	155	235	30.7	17.7	19.6
46	162	247	31.9	19.1	20.4
47	153	237	30.6	18.6	20.4
48	162	245	32.5	18.5	21.1
49	164	248	32.3	18.8	20.9

2. การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยระหว่างสองกลุ่มกรณีตัวแปรเดียว

พิจารณาในตาราง 1 แสดงการวัดร่างกายของนกกระจอกเพศเมีย 49 ตัว และสนใจที่จะทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของตัวแปร “ความยาวตลอดลำตัว” ระหว่างกลุ่มนกกระจอกเสียชีวิตและที่รอดชีวิตจากพายุ ซึ่งเราจะกำหนดให้กลุ่มที่หนึ่งเป็นนกกระจอกจำนวน 21 ตัวที่รอดชีวิตและกลุ่มที่สองจะเป็นนกกระจอกจำนวน 28 ตัวที่เสียชีวิต และต้องการทราบว่าค่าเฉลี่ยของทั้งสองกลุ่มนี้มีนัยสำคัญหรือไม่ กระบวนการที่เรามักนิยมใช้กันก็คือการทดสอบด้วย t-test

สมมติในกรณีทั่วไปเราจะให้ตัวแปรที่ถูกทดสอบเป็นตัวแปร X และให้ X_{i1} แทนค่าของตัวแปร X ในกลุ่มที่ 1 เมื่อ $i = 1,2,\ldots,n_1$ และ X_{i2} แทนค่าของตัวแปร X ในกลุ่มที่ 2 เมื่อ $i = 1,2,\ldots,n_2$ ดังนั้นค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างกลุ่มที่ j คือ

$$\overline{X}_j = \sum_{i=1}^{n_j} \frac{X_{ij}}{n_j} \tag{1}$$

และ

$$S_j^2 = \sum_{i=1}^{n_j} \frac{(X_{ij} - \overline{X}_j)^2}{(n_j - 1)} \tag{2}$$

สมมติว่า X มีการแจกแจงเป็นโค้งปกติในทั้ง 2 กลุ่มและมีความแปรปรวนภายในกลุ่มเท่ากัน การทดสอบค่าเฉลี่ยของทั้งสองกลุ่มว่ามีค่าเฉลี่ยแตกต่างกันหรือไม่สามารถคำนวณได้โดยใช้สูตร

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} \tag{3}$$

และดูค่าที่คำนวณได้ว่าแตกต่างจากศูนย์หรือไม่โดยการนำไปเทียบกับค่าที่เปิดจากตารางการแจกแจง t ที่ $df = n_1 + n_2 - 2$

ซึ่งการทดสอบแบบนี้จะเชื่อถือได้หากเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นที่การแจกแจงของข้อมูลเป็นโค้งปกติ และสมมติฐานอีกข้อที่ว่าความแปรปรวนของทั้งสองกลุ่มเท่ากัน ถ้าหากความแปรปรวนของทั้งสองกลุ่มไม่เท่ากันก็ต้องไปใช้อีกสูตรหนึ่งคือ

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)}} \tag{4}$$

$$df = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

3. การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยระหว่างสองกลุ่มกรณีหลายตัวแปร

พิจารณาข้อมูลในตาราง 1 อีกครั้ง ในการทดสอบหัวข้อที่แล้วเป็นการทดสอบความแตกต่างโดยแยกทีละตัวแปรที่ถูกวัดในตาราง ซึ่งเป็นวิธีหนึ่งในการทดสอบหาความแตกต่างระหว่างกลุ่มนกกระจอกเพศเมียที่เสียชีวิตและรอดชีวิตจากพายุ อย่างไรก็ตาม เราอาจจะอยากรู้ว่าในตัวแปรทั้งหมด 5 ตัวนี้มีความแตกต่างระหว่างกลุ่มนกกระจอกที่เสียชีวิตและรอดชีวิตจากพายุหรือไม่ หรืออาจจะเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า “จากหลักฐานที่วัดมาทั้งหมดนี้มีความแตกต่างกันระหว่างกลุ่มนกกระจอกที่เสียชีวิตและรอดชีวิตจากพายุหรือไม่?”

คำถามนี้สามารถตอบได้ด้วยการใช้สถิติทดสอบ multivariate test ซึ่งสถิติที่เหมาะสมก็คือ Hotelling T^2 Test เป็นสถิติในรูปทั่วไปของ t-test

ในกรณีทั่วไปที่มีตัวแปร p ตัวหรือ $X_1, X_2, \ldots, X_p$ และขนาดของกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มคือ n_1 และ n_2 และเวกเตอร์ของค่าเฉลี่ยในทั้งสองกลุ่มคือ $\bar{x}_1$ และ $\bar{x}_2$ ซึ่งคำนวณได้ด้วยสูตร (1) และเขียนในรูปเมตริกได้ว่า

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ : \\ \bar{X}_p \end{bmatrix} \tag{5}$$

และเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของกลุ่มตัวอย่างทั้งสองจะใช้สัญลักษณ์ C_1 และ C_2 ซึ่งความแปรปรวนคำนวณได้ด้วยสูตร (2) ความแปรปรวนร่วมคำนวณได้ด้วยสูตร

$$c_{jk} = \sum_{i=1}^{n_j} \frac{(X_{ij} - \bar{X}_j)(X_{ik} - \bar{X}_k)}{n-1} \tag{6}$$

และเขียนในรูปเมตริกได้ว่า

$$C_1 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & .. & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & .. & c_{2p} \\ : & : & & : \\ c_{p1} & c_{p2} & .. & c_{pp} \end{bmatrix} \tag{7}$$

เราสามารถรวมเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมได้ด้วยสูตร

$$C = \frac{\{(n_1 - 1)C_1 + (n_2 - 1)C_2\}}{n_1 + n_2 - 2} \tag{8}$$

ส่วนสถิติ Hotelling T^2 มีสูตรคำนวณว่า

$$T^2 = \frac{n_1 n_2 (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)' C^{-1} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{n_1 + n_2} \tag{9}$$

ค่าสถิตินี้จะต้องแปลงไปเป็น F ก่อนด้วยสูตร

$$F = \frac{(n_1 + n_2 - p - 1)T^2}{(n_1 + n_2 - 2)p} \tag{10}$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบ F ที่ $df_1 = p$ และ $df_2 = (n_1 + n_2 - p - 1)$

ถ้าหากค่าที่คำนวณได้มีนัยสำคัญแล้วหมายความว่าค่าเฉลี่ยของประชากรทั้งสองกลุ่มมีความแตกต่างกัน

ค่า Hotelling T^2 นี้สามารถเขียนอยู่ในอีกรูปหนึ่งได้ว่า

$$T^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} (\bar{x}_{1i} - \bar{x}_{2i}) c^{ik} (\bar{x}_{1k} - \bar{x}_{2k}) \qquad (11)$$

ซึ่งจะง่ายในการคำนวณมากกว่าสมการ (9) โดยกำหนดให้ $\bar{x}_{ji}$ เป็นค่าเฉลี่ยของตัวแปร X_i ของกลุ่มตัวอย่างที่ j และ c^{ik} เป็นสมาชิกในแถวที่ i หลักที่ j ของเมตริกซ์อินเวอร์ส C^{-1}

สถิติ Hotelling T^2 อยู่บนพื้นฐานของข้อตกลงที่ว่าข้อมูลจะต้องมีการแจกแจงเป็นโค้งปกติและความแปรปรวนของแต่ละกลุ่มจะต้องเท่ากัน ในทางปฏิบัติกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มที่นำมาเปรียบเทียบกันด้วย Hotelling T^2 จะสมมติว่ามาจากการแจกแจงปกติร่วมกันหลายตัวแปร (multivariate normal distribution) เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของทั้งสองกลุ่มจะต้องไม่แตกต่างกันและที่สำคัญคือขนาดของแต่ละกลุ่มควรมีจำนวนเท่ากันหรือใกล้เคียงกัน

ตัวอย่างการคำนวณ

จากข้อมูลในตาราง 1 จะใช้การทดสอบความแตกต่างระหว่างกลุ่มทั้งกรณีตัวแปรเดียวและหลายตัวแปร

ก่อนอื่นจะทำการทดสอบตัวแปรเดียวก่อนโดยจะใช้ตัวแปร X1 (ความยาวตลอดลำตัว) เปรียบเทียบระหว่างกลุ่มนกกระจอกเพศเมียที่รอดชีวิตและเสียชีวิต ซึ่งคำนวณได้ค่าเฉลี่ยของกลุ่มนกกระจอก 21 ตัวที่รอดชีวิตได้ค่า $\bar{X}_1 = 157.38$ ในขณะที่ค่าเฉลี่ยของนกกระจอก 28 ตัวที่เสียชีวิตมีค่า $\bar{X}_2 = 158.43$ และความแปรปวนของทั้งสองกลุ่มคือ $S_1^2 = 11.05$ และ $S_2^2 = 15.07$ ตามลำดับ ซึ่งทดสอบแล้วว่าความแปรปรวนของทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน ดั้งนั้นเมื่อคำนวณ t-test ด้วยสูตร (3) จะได้ค่า

$$t = \frac{157.38 - 158.43}{\sqrt{13.36\left(\frac{1}{21} + \frac{1}{28}\right)}} \quad = \quad -0.99$$

df = 47 ซึ่งผลปรากฏว่าไม่มีนัยสำคัญทางสถิติแตกต่างจากศูนย์ที่ระดับนัยสำคัญ .05 นั่นคือไม่มีหลักฐานแสดงให้เห็นความแตกต่างของค่าเฉลี่ยความยาวตลอดลำตัว (X1) ระหว่างกลุ่มนกกระจอกเพศเมียที่เสียชีวิตและรอดชีวิต

ตาราง 2 เปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของตัวแปรทั้ง 5 ระหว่างกลุ่มนกกระจอกที่รอดชีวิตและเสียชีวิต

ตัวแปร	รอดชีวิต		เสียชีวิต		T (df = 47)
	$\bar{X}_1$	S_1^2	$\bar{X}_2$	S_2^2	
X1	157.38	11.05	158.43	15.07	-0.99
X2	241.00	17.50	241.57	32.55	-0.39
X3	31.43	0.53	31.48	0.73	-0.20
X4	18.50	0.18	18.45	0.43	0.33
X5	20.81	0.58	20.84	1.32	-0.10

ตาราง 2 จะสรุปผลการทดสอบทั้ง 5 ตัวแปร ซึ่งผลปรากฏว่าไม่มีตัวแปรใดเลยที่มีค่าเฉลี่ยแตกต่างกันระหว่างกลุ่มนกกระจอกที่รอดชีวิตและเสียชีวิต

จากนั้นเราจะคำนวณโดยใช้ตัวแปรทั้งหมด 5 ตัวแปรซึ่งจำเป็นต้องรู้เวกเตอร์ค่าเฉลี่ยของแต่ละกลุ่มและเมตริกความแปรปรวนร่วม ซึ่งค่าเฉลี่ยจะแสดงในตาราง 2 และเมตริกความแปรปรวนร่วมคำนวณจากสูตร (6) สำหรับกลุ่มตัวอย่างนกกระจอกเพศเมียที่รอดชีวิตจำนวน 21 ตัว ได้ค่าดังนี้

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 157.381 \\ 241.000 \\ 31.433 \\ 18.500 \\ 20.810 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 11.048 & 9.100 & 1.557 & 0.870 & 1.286 \\ 9.100 & 17.500 & 1.910 & 1.310 & 0.880 \\ 1.557 & 1.910 & 0.531 & 0.189 & 0.240 \\ 0.870 & 1.310 & 0.189 & 0.176 & 0.133 \\ 1.286 & 0.880 & 0.240 & 0.133 & 0.575 \end{bmatrix}$$

และสำหรับกลุ่มตัวอย่างนกกระจอกเพศเมียที่เสียชีวิตจำนวน 28 ตัว ได้ค่าดังนี้

$$\bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 158.429 \\ 241.571 \\ 31.479 \\ 18.446 \\ 20.839 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 15.069 & 17.190 & 2.243 & 1.746 & 2.931 \\ 17.190 & 32.550 & 3.398 & 2.950 & 4.066 \\ 2.243 & 3.398 & 0.728 & 0.470 & 0.559 \\ 1.743 & 2.950 & 0.470 & 0.434 & 0.506 \\ 2.931 & 4.066 & 0.559 & 0.506 & 1.321 \end{bmatrix}$$

จากนั้นรวมเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมด้วยสูตร (8) ดังนี้

$$C = (20C_1 + 27C_2)/47$$

ตัวอย่างในการคำนวณ C เช่นคำนวณสมาชิกในแถวที่ 2 หลักที่ 3 สามารถคำนวณได้ค่าเท่ากับ {20(1.910) + 27(3.398)}/47 = 2.765

นำมาเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ว่า

$$C = \begin{bmatrix} 13.358 & 13.748 & 1.951 & 1.373 & 2.231 \\ 13.748 & 26.146 & 2.765 & 2.252 & 2.710 \\ 1.951 & 2.765 & 0.645 & 0.350 & 0.423 \\ 1.373 & 2.252 & 0.350 & 0.324 & 0.347 \\ 2.231 & 2.710 & 0.423 & 0.347 & 1.004 \end{bmatrix}$$

อินเวอร์สเมตริกซ์ C จะได้

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2061 & -0.0694 & -0.2395 & 0.0785 & -0.1969 \\ -0.0694 & 0.1234 & -0.0376 & -0.5517 & 0.0277 \\ -0.2395 & -0.0376 & 4.2219 & -3.2624 & -0.0181 \\ 0.0785 & -0.5517 & -3.2624 & 11.4610 & -1.2720 \\ -0.1969 & 0.0277 & -0.0181 & -1.2720 & 1.8068 \end{bmatrix}$$

แทนค่า C^{-1} และค่าอื่น ๆ ลงในสูตร (11) จะได้

$$T^2 = \frac{21\times 28}{21+28}[(157.381-158.429)\times 0.2061\times(157.381-158.429)$$
$$+(157.381-158.429)\times 0.0694\times(241.000-241.571)$$
$$+\ldots+(20.810-20.839)\times 1.8068\times(20.810-20.839)$$
$$= 2.824$$

ใช้สูตร (10) แปลงเป็นสถิติ F ได้ดังนี้

$$F = \frac{(21+28-5-1)\times 2.824}{(21+28-2)\times 5} = 0.517$$

ซึ่งมี df เท่ากับ 5 และ 43 เห็นชัดเจนว่าไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ นั่นคือไม่มีหลักฐานที่จะแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างในทุกตัวแปรระหว่างนกกระจอกเพศเมียที่รอดชีวิตและเสียชีวิต

บรรณานุกรม

ชูศรี วงศ์รัตนะ. **เทคนิคการใช้สถิติเพื่อการวิจัย**. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2541.

สำเริง บุญเรืองรัตน์. **เทคนิคการวิเคราะห์ตัวแปรพหุคูณ**. กรุงเทพฯ : ต้นอ้อแกรมมี่, 2540.

Manly, Bryan F. J. **Multivariate Statistical Methods.** London : Chapman & Hall, 1994.