บทที่ 4
เมตริกซ์ในการวิเคราะห์การถดถอย

ในบทที่ผ่านมานั้นกล่าวถึงการวิเคราะห์ข้อมูลที่ตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียวแต่ในบทถัดๆ ไปนั้นจะกล่าวถึงตัวแปรอิสระที่มีมากกว่า 1 ตัว การคำนวณสำหรับข้อมูลที่มีตัวแปรอิสระมากกว่า 1 ตัวโดยใช้สูตรในบทที่ผ่านมาจะยุ่งยากและเสียเวลาดังนั้นการใช้เวคเตอร์และเมตริกซ์จะช่วยให้การคำนวณทำได้ง่ายและรวดเร็วขึ้น ในบทนี้จะกล่าวถึงแนวคิดพื้นฐานในการคำนวณเมตริกซ์ที่จำเป็นในการวิเคราะห์การถดถอย

4.1 เมตริกซ์

เมตริกซ์ (matrix) คือกลุ่มของข้อมูลที่เรียงกันทั้งแนวแถว (row) และแนวหลัก (column) โดยตัวเลขแต่ละตัวเรียกว่าสมาชิก (element) ขนาดของเมตริกซ์บอกโดยการระบุจำนวนแถวและจำนวนหลัก โดยทั่วไปเมตริกซ์จะประกอบด้วย m แถวและ n หลักตัวอย่างเช่น

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ **A** เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด 3 X 2 คือมีจำนวน 3 แถวและ 2 หลักและ **A** มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 6 สามารถเขียน **A** อยู่ในรูป $\mathbf{A}_{3 \times 2}$

เมตริกซ์ **B** เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด 3 X 3 คือมีจำนวน 3 แถวและ 3 หลักและ **B** มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 9 สามารถเขียน **B** อยู่ในรูป $\mathbf{B}_{3 \times 3}$

การเขียนเมตริกซ์อาจเขียนในรูปของอักษรตัวเอียงหรืออักษรตัวหนาเพื่อแสดงความแตกต่างจากอักษรภาษาอังกฤษทั่วไป สัญลักษณ์ที่ใช้ในการเรียกสมาชิกในเมตริกซ์คือ

$$\begin{array}{c} \\ i=1 \\ i=2 \\ i=3 \\ \vdots \\ i=m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} j=1 & j=2 & j=3 & \dots & j=n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

ในแต่ละสมาชิกจะมี subscript 2 ตัวโดยตัวแรกคือแถวที่สมาชิกอยู่และตัวหลังคือหลักที่สมาชิกอยู่ เช่น ในกรณีของเมตริกซ์ **A** นั้น a_{12} = 3 หรือสมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 2 มีค่าเท่ากับ 3 และ a_{31} = 5 หรือสมาชิกในแถวที่ 3 หลักที่ 1 มีค่าเท่ากับ 5 เป็นต้น

4.2 ชนิดของเมตริกซ์

Neter et al (1996) หน้า 186-188 กล่าวถึงเมตริกซ์ว่ามีด้วยกันหลายรูปแบบดังนี้

4.2.1 เมตริกซ์จัตุรัส

เมตริกซ์จัตุรัส (square matrix) เป็นเมตริกที่มีจำนวนแถวและหลักเท่ากันหรือเมตริกซ์ที่มีขนาด n X n ตัวอย่างเช่นเมตริกซ์ **B** ในหัวข้อ 4.1 เป็นต้น

4.2.2 เมตริกซ์เฉียง

เมตริกซ์เฉียง (diagonal matrix) เป็นเมตริกซ์ที่มีสมาชิกในแนวเฉียง (diagonal element) มีค่าไม่เท่ากับ 0 แต่สมาชิกนอกแนวเฉียง (off diagonal element) มีค่าเป็น 0 ทั้งหมด เช่น

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4.2.3 เมตริกซ์เอกลักษณ์

เมตริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) เป็นเมตริกซ์รูปแบบหนึ่งของเมตริกเฉียงแต่มีค่าของสมาชิกในแนวเฉียงมีค่าเป็น 1 ทั้งหมด เช่น เมตริกซ์ **B** เป็นต้น โดยทั่วไปใช้สัญลักษณ์แทนเมตริกซ์เอกลักษณ์เป็น **I**

4.2.4 สเกลาร์เมตริกซ์

สเกลาร์เมตริกซ์ (scalar matrix) เป็นเมตริกซ์เฉียงที่มีค่าของสมาชิกในแนวเฉียงมีค่าเท่ากันหมดเช่น

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4.2.5 เมตริกหนึ่ง

เมตริกซ์หนึ่ง (unity matrix) เป็นเมตริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกทุกตัวมีค่าเท่ากับ 1 โดยทั่วไปมักใช้สัญลักษณ์แทนเมตริกชนิดนี้ว่า **J** เช่น

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2.6 เมตริกซ์สมมาตร

เมตริกซ์สมมาตร (symmetric matrix) เป็นเมตริกซ์จัตุรัสที่มีค่าของสมาชิกนอกแนวเฉียงที่อยู่ตรงข้ามกันมีค่าเท่ากันหรือ $a_{ij} = a_{ji}$ เช่น

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ

1. หากเมตริกซ์มีจำนวนแถวเท่ากับ 1 เรียกเวกเตอร์แถว (row vector) หรือเรียกสั้นๆ ว่าเวกเตอร์โดยเวกเตอร์มีขนาดเป็น m X 1 เช่น

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

2. หากเมตริกซ์มีจำนวนหลักเท่ากับ 1 เรียกเวกเตอร์หลัก (column vector) หรือเรียกสั้นๆ ว่าเวกเตอร์โดยเวกเตอร์มีขนาดเป็น 1 X n เช่น

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}$$

3. เวกเตอร์หนึ่ง (unity vector) เป็นเวกเตอร์หลักที่สมาชิกทุกตัวมีค่าเป็น 1 มักใช้สัญลักษณ์คือ $\mathbf{1}_{r\,\mathrm{x}\,1}$ เช่น

$$\mathbf{1}_{4\mathrm{x}1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. เวกเตอร์ศูนย์ (zero vector) เป็นเวกเตอร์หลักที่สมาชิกทุกตัวมีค่าเป็น 0 มักใช้สัญลักษณ์คือ $\mathbf{0}_{r\,\mathrm{x}\,1}$ เช่น

$$\mathbf{0}_{3\text{x}1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.3 การดำเนินการของเมตริกซ์

การดำเนินการของเมตริกซ์ที่สำคัญและใช้บ่อยในการวิเคราะห์การถดถอยมีดังนี้คือ

4.3.1 การสลับเปลี่ยนของเมตริกซ์

การสลับเปลี่ยนของเมตริกซ์ (transpose of matrix) ทำได้โดยการสลับแถวเป็นหลักและหลักเป็นแถว การสลับเปลี่ยนของ **A** สามารถเขียนได้เป็น **A'** หากให้ $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \text{ x } n}$ แล้ว $\mathbf{A}' = [a_{ji}]_{n \text{ x } m}$

ตัวอย่างที่ 4.1 กำหนดให้ $\mathbf{A}_{3\text{ X }2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ จงสลับเปลี่ยนเมตริกซ์ **A**

วิธีทำ

การสลับเปลี่ยนทำโดยสลับหลักที่ 1 เป็นแถวที่ 1 และสลับหลักที่ 2 เป็นแถวที่ 2 ทำเช่นนี้เรื่อยไปจนครบทุกหลัก

$$\mathbf{A}'_{2\text{ X }3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ

1. หากเมตริกซ์ใดมีค่าเท่ากับเมตริกซ์ที่สลับเปลี่ยนแล้วเมตริกซ์นั้นจะเป็นเมตริกซ์สมมาตรหรือ $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$ นั่นคือเมตริกซ์ **A** เป็นเมตริกซ์สมมาตรเช่น

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

2. เวกเตอร์หลักเมื่อทำการสลับเปลี่ยนแล้วจะกลายเป็นเวกเตอร์แถว ในทำนองเดียวกันเวกเตอร์แถวจะกลายเป็นเวกเตอร์หลัก

4.3.2 การเท่ากันของเมตริกซ์

เมตริกซ์สองเมตริกซ์จะเท่ากันก็ต่อเมื่อเมตริกซ์ทั้งสองมีขนาดเท่ากันและสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมีค่าเท่ากัน เช่น

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

หาก $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ แล้ว

$$b_{11} = 1 \qquad b_{21} = 0 \qquad b_{31} = 5$$

$$b_{12} = 3 \qquad b_{22} = 2 \qquad b_{32} = 1$$

4.3.3 การบวกและลบเมตริกซ์

เมตริกซ์สองเมตริกซ์จะทำการบวกและลบได้ก็ต่อเมื่อทั้งสองเมตริกซ์มีขนาดเท่ากัน การบวกเมตริกซ์จะนำสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมาบวกกัน ในทำนองเดียวกันการลบทำโดยนำสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมาลบออกจากกัน สามารถเขียนได้ในรูปทั่วไปดังนี้

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [\, a_{ij} + b_{ij}]$$

และ

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = [\, a_{ij} - b_{ij}]$$

ตัวอย่างที่ 4.2 ให้ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ จงหา $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ และ $\mathbf{A} - \mathbf{B}$

วิธีทำ

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+1 & 3+1 \\ 4+2 & 5+2 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

และ

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 4-2 & 5-2 & 6-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

4.3.4 การคูณเมตริกซ์ด้วยสเกลาร์

สเกลาร์ (scalar) เป็นค่าคงที่ใดๆ โดยทั่วไปใช้สัญลักษณ์แทนสเกลาร์ว่า λ การคูณเมตริกซ์ด้วยสเกลาร์นั้นทำได้โดยคูณสมาชิกในเมตริกซ์ทุกค่าด้วยสเกลาร์นั้นๆ หากให้ $\mathbf{A} = [\, a_{ij}\,]$ แล้วสามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปดังนี้

$$\lambda\mathbf{A} = \mathbf{A}\lambda = [\lambda\, a_{ij}\,]$$

ตัวอย่างที่ 4.3 ให้ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ และ $\lambda = 2$ แล้ว จงหา 2**A**

วิธีทำ

$$2\mathbf{A} = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ

สเกลาร์เมตริกซ์เกิดจากการคูณเมตริกซ์เอกลักษณ์ด้วยค่าคงที่ เช่น

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2\mathbf{I}$$

4.3.5 การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์

การคูณ 2 เมตริกซ์เข้าด้วยกันนั้นจำนวนหลักของเมตริกซ์แรกจะต้องเท่ากับจำนวนแถวของเมตริกซ์หลังจึงจะคูณกันได้หรือ $\mathbf{A}_{m\ x\ p}\ \mathbf{B}_{p\ x\ n} = \mathbf{C}_{m\ x\ n}$ การคูณทำโดยนำเอาแถวแรกของเมตริกซ์แรกคูณด้วยหลักแรกของเมตริกซ์หลังจะได้เป็นสมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 1 ของเมตริกซ์ผลคูณ การหาค่าสมาชิกของสมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 2 นั้นทำโดยการคูณแถวแรกของเมตริกซ์แรกกับหลักที่สองของเมตริกซ์หลัง ทำเช่นนี้เรื่อยไปจนครบได้ครบทุกสมาชิกในเมตริกซ์ใหม่หรือสามารถเขียนได้ในรูปทั่วไปดังนี้

$$\mathbf{A\,B} = \mathbf{C}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

โดยที่ $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$

ในกรณีของเมตริกซ์ 2 X 2 สามารถเขียนได้ดังนี้

ให้ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 4.4 ให้ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา **AB**

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4(-1)+3(5) & 4(-2)+3(2) \\ 2(-1)+1(5) & 2(-2)+1(2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4.5 ให้ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ จงหา **AC**

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\mathbf{AC} &= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4(1)+3(2) & 4(0)+3(-3) & 4(-1)+3(5) \\ 2(1)+2(2) & 2(0)+2(-3) & 2(-1)+2(5) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & -9 & -11 \\ 6 & -6 & 8 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

หมายเหตุ

1. การสลับที่ของการคูณเมตริกซ์นั้นไม่เป็นจริงหรือ $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

2. เมตริกซ์จัตุรัสใดๆ คูณกับเมตริกซ์เอกลักษณ์จะได้เมตริกซ์จัตุรัสนั้นหรือ **AI** = **A** = **IA**

3. การคูณเมตริกจัตุรัสที่สลับเปลี่ยนแล้วด้วยเมตริกจัตุรัสนั้นจะได้เมตริกซ์สมมาตรหรือ $\mathbf{A'A} = \mathbf{B}$ โดย **B** เป็นเมตริกซ์สมมาตร เช่น

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\mathbf{B} = \mathbf{A'A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -7 & 13 \\ -7 & 10 & 9 \\ 13 & 9 & 38 \end{bmatrix}$

4. การคูณเวกเตอร์หนึ่งที่สลับเปลี่ยนแล้วกับเวกเตอร์หนึ่งจะได้เวกเตอร์ที่มีสมาชิกเพียงตัวเดียวและมีค่าเท่ากับจำนวนแถวของเวกเตอร์หนึ่งนั้นหรือ $\mathbf{1}'_{1\mathrm{xn}}\mathbf{1}_{\mathrm{nx}1} = n$ เช่น

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\end{bmatrix} = 4$$

5. การคูณเวกเตอร์หนึ่งกับเวกเตอร์หนึ่งที่สลับเปลี่ยนแล้วจะได้เท่ากับเมตริกซ์หนึ่งที่มีขนาดเท่ากับจำนวนแถวของเวกเตอร์หนึ่งนั้นหรือ $\mathbf{1}_{nx1}\mathbf{1}'_{1xn} = \mathbf{J}_{nxn}$ เช่น

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

4.4 ตัวกำหนด

กำหนดให้ **A** เป็นเมตริกซ์จัตุรัสใดๆ ตัวกำหนด (determinant) ของ **A** สามารถเขียนเป็น |**A**| หรือ det **A**

4.4.1 กรณี $\mathbf{A}_{2X2}$

การหาตัวกำหนดสำหรับเมตริกซ์ขนาด 2 X 2 นั้นทำได้ดังนี้

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

ตัวอย่างที่ 4.6 จงหาตัวกำหนดของเมตริกซ์ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 5\\2 & -1\end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix}1 & 5\\2 & -1\end{vmatrix}$$

$$= 1(-1) - 2(5)$$

$$= -11$$

4.4.2 กรณี $\mathbf{A}_{3X3}$

การหาตัวกำหนดสำหรับเมตริกซ์ขนาด 3 X 3 นั้นทำได้ดังนี้

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

ตัวอย่างที่ 4.7 จงหาตัวกำหนดของเมตริกซ์ **A** = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(6)(-1) + 2(1)(3) + 5(-2)(4) - 3(6)(5) - 4(1)(1) - (-1)(-2)(2)$$

$$= -138$$

4.4.3 กรณีทั่วไป

การหาตัวกำหนดสำหรับเมตริกซ์จัตุรัสโดยทั่วไปไม่ว่าจะมีขนาดเท่าใดก็ตาม สามารถทำได้ดังนี้

(1) คำนวณไมเนอร์ (minor) ของเมตริกซ์โดยไมเนอร์ของ a_{ij} หรือM_{ij} คือตัวกำหนดของเมตริกซ์ที่เกิดจากการตัดแถวที่ *i* และหลักที่ *j* ของเมตริกซ์ **A** ออก

(2) คำนวณโคแฟกเตอร์ (cofactor) ของ a_{ij} หรือ c_{ij} ดังนี้

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

(3) คำนวณตัวกำหนดของ **A** โดย det **A** เท่ากับผลบวกของผลคูณของสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) กับโคแฟกเตอร์ของสมาชิกตัวนั้นดังนี้

เลือกแถวที่ *i* ; $\det \mathbf{A} = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \ldots + a_{ij}c_{ij} + \ldots + a_{in}c_{in}$

เลือกหลักที่ *j* ; $\det \mathbf{A} = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \ldots + a_{ij}c_{ij} + \ldots + a_{nj}c_{nj}$

ตัวอย่างที่ 4.8 จงหาตัวกำหนดของเมตริกซ์ **A** = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

หา det **A** โดยเลือกแถวที่ 1

$$c_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 6(-1) - 4(1) = -10$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -\{-2(-1) - 3(1)\} = 1$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2(4) - 3(6) = -26$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} \\ &= 1(-10) + 2(1) + 5(-26) \\ &= -138 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4.9 จงหาตัวกำหนดของเมตริกซ์ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

หา det **A** โดยเลือกหลักที่ 2

$$c_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 37$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -30$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -3$$

$$c_{42} = (-1)^{4+2}M_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 39$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= a_{12}c_{12} + a_{22}c_{22} + a_{32}c_{32} + a_{42}c_{42} \\ &= -1(37) + 0(-30) + 0(-3) - 3(39) \\ &= -154 \end{aligned}$$

4.5 เมตริกซ์ผกผัน

เมตริกซ์ผกผัน (inversed Matrix) คือเมตริกซ์ที่คูณกับเมตริกซ์ใดแล้วได้เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ เมตริกซ์ผกผันของ **A** สามารถเขียนแทนด้วย $\mathbf{A}^{-1}$ โดยที่

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

เมตริกซ์ผกผันเป็นเมตริกซ์จัตุรัส เมตริกซ์จัตุรัสทุกเมตริกซ์ไม่จำเป็นต้องมีเมตริกซ์ผกผัน หากเมตริกซ์ใดมีเมตริกซ์ผกผันแล้วเมตริกซ์นั้นเรียกว่า เมตริกซ์ไม่ใช่เอกฐาน (non-singular matrix) และเมตริกซ์ที่ไม่มีเมตริกผกผันเรียกว่า เมตริกซ์เอกฐาน (singular matrix) เมตริกซ์ที่ตัวกำหนดมีค่าเป็น 0 จะไม่มีเมตริกซ์ผกผัน

4.5.1 กรณี $\mathbf{A}_{2X2}$

การหาเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ขนาด 2 X 2 ทำได้ดังนี้

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{D} & \frac{-b}{D} \\ \frac{-c}{D} & \frac{a}{D} \end{bmatrix}$$

โดย D คือตัวกำหนดหรือ $D = ad - bc$

ตัวอย่างที่ 4.10 จากตัวอย่างที่ 4.6 จงหาเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

จากตัวอย่างที่ 4.6 ได้ค่า D = -11

ดังนั้น

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{-11} & \frac{-5}{-11} \\ \frac{-2}{-11} & \frac{1}{-11} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{-1}{11} \end{bmatrix}$$

4.5.2 กรณีทั่วไป

การหาเมตริกซ์ผกผันสำหรับเมตริกซ์ทั่วไปทำได้ดังนี้

(1) คำนวณเมตริกซ์ผูกพัน (adjoint matrix) ของ **A** หรือ *adj* **A** โดยเมตริกซ์ผูกพันเป็นเมตริกซ์สลับเปลี่ยนของเมตริกซ์ที่มีสมาชิกประกอบด้วยโคแฟกเตอร์ของสมาชิก **A** หรือ *adj* **A** = $\left[c_{ij}\right]'_{n\times n}$

(2) คำนวณเมตริกซ์ผกผันโดย

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} adj\mathbf{A}$$

โดย $\det \mathbf{A} \neq 0$

ตัวอย่างที่ 4.11 จากตัวอย่างที่ 4.7 จงหาเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

จากตัวอย่างที่ 4.7 ได้ $\det \mathbf{A} = -138$

$$adj\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}'$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \end{bmatrix}'$$

$$= \begin{bmatrix} -10 & 1 & -26 \\ 22 & -16 & 2 \\ -28 & -11 & 10 \end{bmatrix}'$$

$$= \begin{bmatrix} -10 & 22 & -28 \\ 1 & -16 & -11 \\ -26 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-138}\begin{bmatrix} -10 & 22 & -28 \\ 1 & -16 & -11 \\ -26 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{10}{138} & \frac{-22}{138} & \frac{28}{138} \\ \frac{-1}{138} & \frac{16}{138} & \frac{11}{138} \\ \frac{26}{138} & \frac{-2}{138} & \frac{-10}{138} \end{bmatrix}$$

4.6 สมการถดถอยในรูปของเมตริกซ์

จากบทที่ 2 สมการถดถอยคือ $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ สามารถเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์ของข้อมูลแต่ละค่าได้ดังนี้

$$\mathbf{Y} \quad = \quad \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 X_1 \\ \beta_0 + \beta_1 X_2 \\ \vdots \\ \beta_0 + \beta_1 X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon_1 \\ \beta_0 + \beta_1 X_2 + \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \beta_0 + \beta_1 X_n + \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

โดยที่ **Y** เป็นเวกเตอร์มีขนาดเป็น n X 1 ของค่าตัวแปรตาม

X เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด 2 X n ที่มีหลักแรกเป็น 1 และหลักที่ 2 เป็นค่าตัวแปรอิสระ

$\boldsymbol{\beta}$ เป็นเวกเตอร์มีขนาดเป็น 2 X 1 ของสัมประสิทธิ์การถดถอย β_0 และ β_1

$\boldsymbol{\varepsilon}$ เป็นเวกเตอร์มีขนาดเป็น n X 1 ของค่าความคลาดเคลื่อน

เช่น จากข้อมูลในตัวอย่างที่ 1.1 สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 77.60 \\ 114.90 \\ \vdots \\ 141.40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10.01 \\ 1 & 14.75 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 21.40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

จากข้อตกลงของสมการถดถอยคือความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนมีค่าคงที่เท่ากับ σ^2 และความคลาดเคลื่อนแต่ละตัวเป็นอิสระต่อกันหรือความแปรปรวนร่วม (covariance) ทุกตัวมีค่าเป็น 0 จากข้อตกลงนี้สามารถเขียนเมตริกซ์ของความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนได้ดังนี้คือ

$$\boldsymbol{\sigma}^2 = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \mathbf{I}$$

4.6.1 สมการถดถอย

สมการปกติของการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในบทที่ 2 (2.5) และ (2.6) คือ

$$nb_0 + b_1\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

และ

$$b_0\sum_{i=1}^{n} X_i + b_1\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} X_iY_i$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ดังนี้

$$\mathbf{(X'X)\ b} = \mathbf{X'\ Y} \tag{4.1}$$

เนื่องจาก

$$\begin{bmatrix} nb_0 + b_1\sum_{i=1}^{n} X_i \\ b_0\sum_{i=1}^{n} X_i + b_1\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_iY_i \end{bmatrix}$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_iY_i \end{bmatrix}$$

โดยที่ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{X'X} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

$$\mathbf{X'\ Y} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_iY_i \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

จากสมการที่ (4.1) สามารถหาเวกเตอร์ **b** ได้ดังนี้

$$\mathbf{b} = \mathbf{(X'X)^{-1}\ X'\ Y} \tag{4.4}$$

โดยที่ **X'X** ต้องสามารถหาเมตริกซ์ผกผันได้

ตัวอย่างที่ 4.12 จากตัวอย่างที่ 1.1 จงหาค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยโดยการใช้เมตริกซ์

วิธีทำ

จากตัวอย่างที่ 4.11 ได้ $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 77.60 \\ 114.90 \\ \vdots \\ 141.40 \end{bmatrix}$ และ $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 10.01 \\ 1 & 14.75 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 21.40 \end{bmatrix}$

ดังนั้น

$$\mathbf{X'X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 10.01 & 14.75 & \cdots & 21.40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 10.01 \\ 1 & 14.75 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 21.40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 299.41 \\ 299.41 & 7733.41 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{(X'X)^{-1}} = \begin{bmatrix} 0.71027 & -0.0275 \\ -0.0275 & 0.0012 \end{bmatrix}$$

และ $$\mathbf{X'\,Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 10.01 & 14.75 & \cdots & 21.40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 77.60 \\ 114.90 \\ \vdots \\ 141.40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2435.50 \\ 62978.59 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\mathbf{b} = \mathbf{(X'X)^{-1}\,X'\,Y}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.71027 & -0.0275 \\ -0.0275 & 0.0012 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2435.50 \\ 62978.59 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1.99 \\ 8.22 \end{bmatrix}$$

หรือ b_0 = -1.99 และ b_1 = 8.22 จะเห็นว่าผลที่ได้จากการใช้เมตริกซ์เหมือนกับตัวอย่างที่ 2.1

4.6.2 ค่าพยากรณ์

ค่าพยากรณ์ที่ได้จากสมการถดถอย ($\hat{Y}$) สามารถเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$\hat{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{Y}_2 \\ \vdots \\ \hat{Y}_n \end{bmatrix}$$

โดยสามารถคำนวณค่าพยากรณ์โดยใช้เมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X\,b} \tag{4.5}$$

เนื่องจาก

$$\begin{bmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{Y}_2 \\ \vdots \\ \hat{Y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 + b_1 X_1 \\ b_0 + b_1 X_2 \\ \vdots \\ b_0 + b_1 X_n \end{bmatrix}$$

นอกจากนี้ยังสามารถเขียน $\hat{\mathbf{Y}}$ อยู่ในรูปของ **X** และ **Y** คือ

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X(X'X)^{-1}\,X'\,Y} \tag{4.6}$$

หรือ

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{HY} \tag{4.7}$$

โดยกำหนดให้ $$\mathbf{H} = \mathbf{X(X'X)^{-1}\,X'} \tag{4.8}$$

จะเห็นว่า **H** เป็นเมตริกซ์ที่เกิดจากค่าของตัวแปรอิสระเท่านั้น **H** เมตริกซ์เรียกว่า hat matrix เป็นเมตริกซ์จัตุรัสและสมมาตรที่มีขนาด n X n เมตริกซ์นี้มีความสำคัญในการวิเคราะห์ค่าที่ผิดปกติในตัวแปรอิสระและตัวแปรตามรวมถึงการวิเคราะห์ค่าที่มีอิทธิพลโดยจะกล่าวต่อไปในบทที่ 9

ตัวอย่างที่ 4.13 จากตัวอย่างที่ 1.1 จงหาค่าพยากรณ์โดยการใช้เมตริกซ์

วิธีทำ

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X\,b}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 10.01 \\ 1 & 14.75 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 21.40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.99 \\ 8.22 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 80.30 \\ 119.26 \\ \vdots \\ 173.93 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่าค่าพยากรณ์ที่ได้โดยการใช้เมตริกซ์ในการคำนวณมีค่าไม่แตกต่างจากตัวอย่างที่ 2.1

4.6.3 ส่วนเหลือ

ส่วนเหลือ (e) เป็นค่าความแตกต่างระหว่างค่าจริงกับค่าพยากรณ์หรือ $Y_i - \hat{Y}_i$ สามารถเขียนได้อยู่ในรูปเวกเตอร์หลักที่มีขนาด 1 X n ดังนี้

$$\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

หากเขียนส่วนเหลือในรูปของเวกเตอร์สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\boldsymbol{e} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} - \mathbf{Xb}$$

หรือเขียนอยู่ในรูปของ **H** ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e} &= \mathbf{Y} - \mathbf{HY} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{Y} \end{aligned} \tag{4.9}$$

และสามารถเขียนเมตริกซ์ความแปรปรวนของส่วนเหลือได้ดังนี้

$$\boldsymbol{\sigma}^2(e) = \boldsymbol{\sigma}^2(\mathbf{I} - \mathbf{H}) \tag{4.10}$$

เนื่องเมตริกซ์ความแปรปรวนนี้เป็นของพารามิเตอร์ซึ่งสามารถประมาณได้โดยการใช้ความแปรปรวนที่ได้จากตัวอย่างคือ

$$\boldsymbol{s}^2(e) = \boldsymbol{MSE}(\mathbf{I} - \mathbf{H}) \tag{4.11}$$

ตัวอย่างที่ 4.14 จากตัวอย่างที่ 1.1 จงหาส่วนเหลือโดยการใช้เมตริกซ์

วิธีทำ

$$\boldsymbol{e} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}$$

$$= \begin{bmatrix} 77.60 \\ 114.90 \\ \vdots \\ 141.40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 80.30 \\ 119.26 \\ \vdots \\ 173.93 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2.70 \\ -4.36 \\ \vdots \\ 11.07 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่าส่วนเหลือที่ได้โดยการใช้เมตริกซ์ในการคำนวณมีค่าไม่แตกต่างจากตัวอย่างที่ 2.1

4.7 การวิเคราะห์ความแปรปรวน

นอกจากการสร้างสมการถดถอยโดยใช้เมตริกซ์แล้วการวิเคราะห์ความแปรปรวนสามารถคำนวณในรูปของเมตริกซ์โดยในที่นี้จะกล่าวถึงการคำนวณของผลรวมกำลังสองได้ดังนี้

4.7.1 ผลรวมกำลังสองทั้งหมด

ผลรวมกำลังสองทั้งหมด (*SST*) เขียนในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$SST = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \left(\frac{1}{n}\right)\mathbf{Y}'\mathbf{J}\mathbf{Y} \tag{4.12}$$

เนื่องจาก

$$SST = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2}{n} \tag{4.13}$$

โดย

$$\mathbf{Y}'\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \tag{4.14}$$

และ

$$\left(\frac{1}{n}\right)\mathbf{Y}'\mathbf{J}\mathbf{Y} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2}{n} \tag{4.15}$$

4.7.2 ผลรวมกำลังสองความคลาดเคลื่อน

ผลรวมกำลังสองความคลาดเคลื่อน (*SSE*) เขียนในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$SSE = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \mathbf{b}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} \tag{4.16}$$

เนื่องจาก

$$SSE = \mathbf{e}'\mathbf{e} = (\mathbf{Y} - \mathbf{Xb})'(\mathbf{Y} - \mathbf{Xb}) \tag{4.17}$$

4.7.3 ผลรวมกำลังสองถดถอย

ผลรวมกำลังสองถดถอย (*SSR*) เขียนในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$SSR = \mathbf{b}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - \left(\frac{1}{n}\right)\mathbf{Y}'\mathbf{J}\mathbf{Y} \qquad (4.18)$$

เนื่องจาก

$$SSR = SST - SSE$$

$$= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \left(\frac{1}{n}\right)\mathbf{Y}'\mathbf{J}\mathbf{Y} - (\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \mathbf{b}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}) \qquad (4.19)$$

ตัวอย่างที่ 4.15 จากตัวอย่างที่ 1.1 จงคำนวณค่า *SST SSR* และ *SSE* โดยการใช้เมตริกซ์

วิธีทำ

เนื่องจาก $\mathbf{Y}'\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 77.60 & 114.90 & \cdots & 141.40 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 77.60 \\ 114.90 \\ \vdots \\ 141.40 \end{bmatrix}$

$$= 516{,}468.79$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)\mathbf{Y}'\mathbf{J}\mathbf{Y} = \left(\frac{1}{13}\right)\begin{bmatrix} 77.60 & 114.90 & \cdots & 141.40 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 77.60 \\ 114.90 \\ \vdots \\ 141.40 \end{bmatrix}$$

$$= 456{,}281.56$$

$$\mathbf{b}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -1.99 & 8.22 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2435.50 \\ 62978.59 \end{bmatrix}$$

$$= 512{,}837.36$$

ดังนั้น $SST = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \left(\frac{1}{n}\right)\mathbf{Y}'\mathbf{J}\mathbf{Y}$

$$= 516{,}468.79 - 456{,}281.56$$

$$= 60{,}187.23$$

$$SSE = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \mathbf{b}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

$$= 516{,}468.79 - 512{,}837.36$$

$$= 3{,}631.43$$

$$SSR = SST - SSE$$

$$= 60{,}187.23 - 3{,}631.43$$

$$= 56{,}555.80$$

4.8 การประมาณค่าความแปรปรวนและการพยากรณ์

การประมาณค่าความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์การถดถอยและค่าพยากรณ์สามารถใช้เมตริกซ์ในการคำนวณได้ดังนี้

4.8.1 ค่าความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์การถดถอย

การคำนวณค่าความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมของค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยนั้นสามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$\boldsymbol{\sigma}^2\{b\} = \begin{bmatrix} \sigma^2\{b_0\} & \sigma\{b_0, b_1\} \\ \sigma\{b_1, b_0\} & \sigma^2\{b_1\} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

หรือ

$$\boldsymbol{\sigma}^2\{b\} = \sigma^2\left(\mathbf{X'X}\right)^{-1} \quad (4.21)$$

หากแทน **(X'X)**$^{-1}$ จาก (4.2) ได้ดังนี้

$$\boldsymbol{\sigma}^2\{b\} = \begin{bmatrix} \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{S_{xx}}\right) & \frac{-\sigma^2\bar{X}^2}{S_{xx}} \\ \frac{-\sigma^2\bar{X}^2}{S_{xx}} & \frac{\sigma^2}{S_{xx}} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

โดยที่ $S_{xx} = \sum(X_i - \bar{X})^2$

เนื่องจาก σ^2 สามารถประมาณได้โดยการใช้ *MSE* ดังนั้นเมตริกซ์ของความแปรปรวนคือ

$$\boldsymbol{S}^2\{b\} = MSE(\boldsymbol{X'X})^{-1} \quad (4.23)$$

$$\boldsymbol{S}^2\{b\} = \begin{bmatrix} MSE\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{S_{xx}}\right) & \frac{-MSE\bar{X}^2}{S_{xx}} \\ \frac{-MSE\bar{X}^2}{S_{xx}} & \frac{MSE}{S_{xx}} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

ตัวอย่างที่ 4.16 จากตัวอย่างที่ 1.1 จงคำนวณค่าความแปรปรวนของค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยโดยการใช้เมตริกซ์

วิธีทำ

จากตัวอย่างที่ 4.15 ได้ *SSE* = 3,631.43

ดังนั้น

$$MSE = 3{,}631.43 / 11 = 330.13$$

และ $\boldsymbol{S}^2\{b\} = MSE(\boldsymbol{X'X})^{-1}$

$$= 330.13\begin{bmatrix} 0.71027 & -0.0275 \\ -0.0275 & 0.0012 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 234.481 & -9.079 \\ -9.079 & 0.396 \end{bmatrix}$$

4.8.2 ความแปรปรวนของค่าพยากรณ์ของค่าคาดหวังของตัวแปรตามและค่าพยากรณ์ของตัวแปรตาม

กำหนดให้ x_0 คือค่าที่สนใจเราสามารถเขียน x_0 ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\boldsymbol{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ x_0 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \boldsymbol{X}'_0 = \begin{bmatrix} 1 & x_0 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

ค่าพยากรณ์ที่ x_0 สามารถเขียนในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\hat{\boldsymbol{Y}}_0 = \boldsymbol{X}'_0\boldsymbol{b} \tag{4.26}$$

เนื่องจาก

$$\boldsymbol{X}'_0\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \hat{\boldsymbol{Y}}_0$$

ค่าความแปรปรวนของค่าพยากรณ์ของค่าคาดหวังของตัวแปรตามที่ x_0 สามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$\boldsymbol{\sigma}^2\{\hat{y}_0\} = \sigma^2\boldsymbol{X}'_0\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}_0 \tag{4.27}$$

จาก (4.21) ที่ $\boldsymbol{\sigma}^2\{b\} = \sigma^2\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}$ ดังนั้น

$$\boldsymbol{\sigma}^2\{\hat{y}_0\} = \boldsymbol{X}'_0\boldsymbol{\sigma}^2\{b\}\boldsymbol{X}_0 \tag{4.28}$$

ค่าประมาณของค่าความแปรปรวนของค่าพยากรณ์ของค่าคาดหวังของตัวแปรตามที่ x_0 สามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$\boldsymbol{S}^2\{\hat{y}_0\} = MSE(\boldsymbol{X}'_0(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}_0) \tag{4.29}$$

หรือ

$$\boldsymbol{S}^2\{\hat{y}_0\} = \boldsymbol{X}'_0\boldsymbol{S}^2\{b\}\boldsymbol{X}_0 \tag{4.30}$$

ค่าความแปรปรวนของค่าพยากรณ์ของตัวแปรตามที่ x_0 โดย x_0 เป็นค่าที่ไม่ได้อยู่ในข้อมูลสามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$\boldsymbol{S}^2\{\hat{y}_0\} = MSE(1+\boldsymbol{X}'_0(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}_0) \tag{4.31}$$

จะเห็นว่า (4.28) และ (4.29) สอดคล้องกับความแปรปรวนในหัวข้อ 3.1 ของบทที่ 3

ตัวอย่างที่ 4.17 จากตัวอย่างที่ 1.1 จงคำนวณค่าความแปรปรวนของค่าคาดหวังของค่าพยากรณ์ที่ $x_0 = 40$ โดยการใช้เมตริกซ์

วิธีทำ

$$S^2\{\hat{y}_0\} = \boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{S}^2\{b\}\boldsymbol{X}_0$$

$$\boldsymbol{S}^2\{\hat{y}_0\} = \begin{bmatrix}1 & 40\end{bmatrix}\begin{bmatrix}234.481 & -9.079 \\ -9.079 & 0.396\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 40\end{bmatrix}$$

$$= 141.761$$

สรุป

การนำเมตริกซ์เข้ามาช่วยนำการวิเคราะห์การถดถอยทำให้การวิเคราะห์ง่ายและรวดเร็วขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีที่ตัวแปรมีจำนวนมากและ/หรือข้อมูลมีจำนวนมาก การสร้างเมตริกซ์ของตัวแปรอิสระนั้นต้องเพิ่มคอลัมน์ ของค่า 1 เข้าไปทางขวาเพื่อให้สามารถคำนวณค่า b_0 ได้ นอกจากนี้ยังสามารถใช้เมตริกซ์ในการวิเคราะห์ตัวแบบได้อีกด้วย

คำถามท้ายบท

4.1 ให้ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & 1\end{bmatrix}$ จงหา

(1) $\mathbf{A}'$

(2) $\mathbf{A}'\mathbf{A}$

(3) $(\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}$

(4) $3\mathbf{A}$

(5) $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$

4.2 ให้ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ และ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}6 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}$ จงหา

(1) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$

(2) $\mathbf{AB}$

(3) $\mathbf{BA}$

(4) det $\mathbf{A}$

4.3 ให้ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 10 & 40 \end{bmatrix}$ จงหา

(1) $\mathbf{A}^{-1}$

(2) $\mathbf{AA}^{-1}$ และ $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$

4.4 ให้ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \\ 34 \\ 7 \end{bmatrix}$ จงหา

(1) $\mathbf{AB}$

(2) $\mathbf{B}'$

(3) $\mathbf{A}^{-1}$

(4) det $\mathbf{A}$

(5) $\mathbf{B}'\mathbf{AB}$

4.5 ให้ $\mathbf{X}_0' = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ และ $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา

(1) $\mathbf{X}_0'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$

(2) $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}_0$

(3) $\mathbf{X}_0'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}_0$

4.6 ให้ $\mathbf{X}_0' = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$ และ

$\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 20 \\ 18 \\ 56 \\ 30 \\ 45 \end{bmatrix}$ จงหา

(1) $\mathbf{X}_0'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$

(2) $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$

(3) $\mathbf{X}_0'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}_0$

4.7 ให้ $\mathbf{X_0'} = \begin{bmatrix}1 & 3.0\end{bmatrix}$, $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix}12\\7\\21\\10\end{bmatrix}$ และ $\mathbf{X} = \begin{bmatrix}1 & 1.5\\1 & 0.5\\1 & 1.0\\1 & 2.0\end{bmatrix}$ จงหา

(1) $\mathbf{X'X}$

(2) $\mathbf{(X'X)}^{-1}$

(3) $\mathbf{X_0'(X'X)}^{-1}$

(4) $\mathbf{X'Y}$

(5) $\mathbf{(X'X)}^{-1}\mathbf{X'Y}$

(6) $\mathbf{X_0'(X'X)}^{-1}\mathbf{X_0}$

(7) $\mathbf{X(X'X)}^{-1}\mathbf{X'}$

4.8 จากข้อ 4.6 หาก $\mathbf{X_0'} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 4 & 2\end{bmatrix}$ จงหา

(1) $\mathbf{X_0'(X'X)}^{-1}$

(2) $\mathbf{(X'X)}^{-1}\mathbf{X_0}$

(3) $\mathbf{X_0'(X'X)}^{-1}\mathbf{X_0}$

4.9 จากข้อมูลใน 3.1 จงหา

(1) $\mathbf{Y'Y}$

(2) $\mathbf{(X'X)}^{-1}$

(3) $\mathbf{X'Y}$

(4) $\mathbf{b}$

(5) $\hat{\mathbf{Y}}$

(6) $\mathbf{H}$

(7) ให้เปรียบเทียบสมการถดถอยและค่าพยากรณ์ที่ได้จากข้อนี้กับข้อ 3.1

4.10 จากข้อมูลในข้อ 3.2 จงหา

(1) $\mathbf{b}$

(2) $\hat{\mathbf{Y}}$

(3) $\mathbf{e}$

(4) SST

(5) SSR

(6) SSE

4.11 จากข้อมูลในข้อ 3.6 จงหา

(1) $\mathbf{b}$

(2) $\hat{\mathbf{Y}}$

(3) $\mathbf{e}$

(4) $\boldsymbol{S}^2\{b\}$

(5) พยากรณ์จำนวนเชื้อที่เหลืออยู่เมื่อใช้เวลาในการฆ่าเชื้อเท่ากับ 65 นาที

(6) $S^2\{\hat{y}_0\}$ ของค่าคาดหวังของค่าพยากรณ์ที่ 65 นาที

4.12 จากข้อมูลในข้อ 3.7 จงหา

(1) $\mathbf{b}$

(2) $\hat{\mathbf{Y}}$

(3) $\mathbf{e}$

(4) $\boldsymbol{S}^2\{b\}$

(5) พยากรณ์ค่า Y ที่ X เท่ากับ 4 และ 5

(6) $S^2\{\hat{y}_0\}$ ที่ X เท่ากับ 4 และ 5