บทที่ 2
สถิติพื้นฐานทางการวัดและการทดสอบ

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

1. สามารถบอกความหมายของสถิติได้
2. สามารถเปรียบเทียบความแตกต่างของสถิติในแต่ละประเภทได้
3. สามารถอธิบายความแตกต่างของประชากรและกลุ่มตัวอย่างได้
3. สามารถเปรียบเทียบค่าสถิติการวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางและการวัดการกระจายแต่ละตัวได้
4. สามารถนำค่าสถิติการวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางและการวัดการกระจายไปประยุกต์ใช้กับข้อมูลทางการวัดผลการศึกษาได้
5. สามารถนำการวัดความสัมพันธ์ไปใช้ในการวัดผลการศึกษาได้
6. สามารถเปรียบเทียบความแตกต่างของการแจกแจงคะแนนรูปแบบต่าง ๆ ได้

เนื้อหา

1. ความหมายของสถิติ
2. ประเภทของสถิติ
3. ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
4. การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง
5. การวัดการกระจาย
6. คะแนนมาตรฐาน
7. การวัดความสัมพันธ์
8. การแจกแจงของคะแนนรูปแบบต่าง ๆ

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. บรรยาย
2. ซักถามระหว่างบรรยาย
3. คำถามท้ายบท

สื่อการเรียนการสอน

1. แผ่นใส
2. เอกสารประกอบการสอน

การวัดผล

1. สังเกตความตั้งใจขณะบรรยาย
2. สังเกตการตอบคำถามของผู้เรียน
3. ตรวจผลงาน

ความหมายของสถิติ

คำว่า สถิติ (Statistics) มาจากภาษาเยอรมันว่า Statistik มีรากศัพท์มาจาก Stat หมายถึงข้อมูลหรือสารสนเทศ ซึ่งจะอำนวยประโยชน์ต่อการบริหารประเทศในด้านต่าง ๆ เช่น การทำสำมะโนครัว เพื่อจะทราบจำนวนพลเมืองในประเทศทั้งหมด ในสมัยต่อมา คำว่า สถิติ ได้หมายถึง ตัวเลขหรือข้อมูลที่ได้จากการเก็บรวบรวม เช่น จำนวนผู้ประสบอุบัติเหตุบนท้องถนน อัตราการเกิดของเด็กทารก ปริมาณน้ำฝนในแต่ละปี เป็นต้น สถิติในความหมายที่กล่าวมานี้เรียกอีกอย่างว่า ข้อมูลทางสถิติ (Statistical data)

อีกความหมายหนึ่ง สถิติ หมายถึง วิธีการที่ว่าด้วยการเก็บรวบรวมข้อมูล การนำเสนอข้อมูล การวิเคราะห์ข้อมูล และการตีความหมายข้อมูล สถิติในความหมายนี้เป็นทั้งวิทยาศาสตร์และศิลปศาสตร์ เรียกว่า สถิติศาสตร์

ประเภทของสถิติ

สถิติแบ่งออกเป็น 2 ประเภทคือ

1. สถิติพรรณนา (Descriptive Statistics) เป็นวิธีการทางสถิติที่ใช้อธิบายคุณลักษณะต่าง ๆ ของสิ่งที่ต้องการศึกษาในกลุ่มใดกลุ่มหนึ่ง วิธีการทางสถิติที่อยู่ในประเภทนี้ เช่น
   - การแปลงคะแนนให้อยู่ในรูปแบบอื่น ๆ เช่น เปอร์เซ็นต์ไทล์ คะแนนมาตรฐาน ฯลฯ
   - การคำนวณหาค่าเฉลี่ย หรือการกระจายของข้อมูล เช่น มัชฌิมเลขคณิต มัธยฐาน ฐานนิยม พิสัย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ความแปรปรวน ฯลฯ
2. สถิติอ้างอิง (Inferential Statistics) เป็นวิธีการทางสถิติที่ใช้อธิบายคุณลักษณะของสิ่งที่ต้องการศึกษาในกลุ่มใดกลุ่มหนึ่ง แล้วสามารถอ้างอิงไปยังกลุ่มอื่น ๆ ได้ โดยกลุ่มที่นำมาศึกษาจะต้องเป็นตัวแทนที่ดีของประชากร ตัวแทนที่ดีของประชากรได้มาโดยการวิธีการสุ่ม

ตัวอย่าง และตัวแทนที่ดีของประชากรจะเรียกว่า “กลุ่มตัวอย่าง” สถิติอ้างอิงสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภทคือ

2.1 สถิติมีพารามิเตอร์ (Parametric statistics) เป็นวิธีการทางสถิติที่จะต้องเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้น 3 ประการ คือ

1) ตัวแปรที่ต้องการวัดจะต้องอยู่ในมาตราการวัดระดับช่วง (Interval scale) ขึ้นไป

2) ข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้จากกลุ่มตัวอย่างจะต้องมีการแจกแจงแบบปกติ

3) กลุ่มประชากรแต่ละกลุ่มที่นำมาศึกษาจะต้องมีความแปรปรวนเท่ากัน

สถิติมีพารามิเตอร์เช่น t-test ANOVA Regression Analysis ฯลฯ

2.2 สถิติไร้พารามิเตอร์ (Nonparametric statistics) เป็นวิธีการทางสถิติที่ไม่มีข้อจำกัดใด ๆ นั่นคือ

1) ตัวแปรที่ต้องการวัดอยู่ในมาตราการวัดระดับใดก็ได้ (Nominal scale, Ordinal scale, Interval scale และ Ratio Scale)

2) ข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้จากกลุ่มตัวอย่างมีการแจกแจงแบบใดก็ได้ (Free distribution)

3) กลุ่มประชากรแต่ละกลุ่มที่นำมาศึกษาไม่จำเป็นต้องมีความแปรปรวนเท่ากัน

สถิติไร้พารามิเตอร์เช่น ไคสแควร์ Median test Sign test ฯลฯ

โดยปกติแล้วมักนิยมใช้สถิติมีพารามิเตอร์ ทั้งนี้เพราะผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้สถิติมีพารามิเตอร์จะมีอำนาจการทดสอบ (Power of test) ที่สูงกว่าสถิติไร้พารามิเตอร์ ดังนั้นเมื่อข้อมูลมีคุณสมบัติที่สอดคล้องกับข้อตกลงเบื้องต้นสามประการในการใช้สถิติมีพารามิเตอร์ จึงไม่จำเป็นต้องใช้สถิติไร้พารามิเตอร์ในการทดสอบสมมติฐาน

อำนาจการทดสอบ (Power of test) คือ ความน่าจะเป็นที่ผลการทดสอบทางสถิติจะถูกต้องตรงตามสภาพที่แท้จริง

นอกจากนี้ในทางการวัดผลการศึกษายังมีสถิติอีกกลุ่มหนึ่งที่ใช้กันนั่นคือสถิติเพื่อหาคุณภาพของเครื่องมือวัดผลการศึกษา ซึ่งจะมีสูตรในการคำนวณเฉพาะดังจะได้กล่าวต่อไป

ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากร (Population) คือ กลุ่มของการวัดทั้งหมดที่สนใจศึกษา ซึ่งอาจจะเป็นคน สัตว์ หรือสิ่งของก็ได้ เช่น ประชากรนิสิตคณะศึกษาศาสตร์ในมหาวิทยาลัยของรัฐ ประชากรนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ของโรงเรียนเอกชนในจังหวัดสงขลา เป็นต้น โดยผู้ที่ศึกษาอาจจะศึกษาจากประชากรทั้งหมดที่สนใจศึกษา โดยเก็บรวบรวมข้อมูลจากสมาชิกทุกหน่วยในกลุ่มนั้น ซึ่งค่าต่าง ๆ ที่ได้จากประชากรจะเรียกว่า ค่าพารามิเตอร์ (Parameter) เช่น ค่าเฉลี่ยของประชากรนักเรียนในชมรมคณิตศาสตร์ของโรงเรียนเอกชนในจังหวัดสงขลา ซึ่งค่าเฉลี่ยนี้เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ μ (อ่านว่า มิว) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากรเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ σ (อ่านว่า ซิกม่า) หรือสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร 2 ตัวเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ρ (อ่านว่า โร)

ตัวอย่าง (Sample) คือ สับเซตหรือบางส่วนของการวัดที่มาจากประชากรที่สนใจศึกษา ในความเป็นจริงนั้นเราสนใจที่จะศึกษาจากประชากรทั้งหมด ในกรณีที่ประชากรมีจำนวนมากจึงเป็นไปไม่ได้ที่ศึกษาได้ทั้งหมด ดังนั้นจึงจำเป็นที่อาจจะเลือกมาส่วนหนึ่งเพื่อศึกษา แล้วอ้างอิงผลการศึกษานั้นไปยังกลุ่มประชากรทั้งหมด ซึ่งส่วนหนึ่งที่เลือกมาจากประชากรนั้นจะเรียกว่ากลุ่มตัวอย่าง และการอ้างอิงผลจากการศึกษาไปยังประชากรนั้น จำเป็นอย่างยิ่งที่กลุ่มตัวอย่างจะต้องเป็นตัวแทนที่ดีของกลุ่มประชากร และค่าต่าง ๆ ที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างจะเรียกว่า ค่าสถิติ (Statistic) เช่น ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างนักเรียนในชมรมคณิตศาสตร์ของโรงเรียนเอกชนในจังหวัดสงขลา ซึ่งค่าเฉลี่ยนี้เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{X}$ (อ่านว่า เอ็กซ์บาร์) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่างเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ S หรือสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร 2 ตัวเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ r

การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง

การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางเป็นการคำนวณหาค่ากึ่งกลางของข้อมูล โดยปกติจะใช้ฐานนิยม (Mode) มัธยฐาน (Median) และ มัชฌิมเลขคณิต (Arithmetic Mean) แต่มีการแจกแจงความถี่บางอย่างซึ่งมีอยู่น้อยมากที่ใช้มัชฌิมเรขาคณิต (Geometric Mean) และมัชฌิมฮาร์โมนิก (Harmonic Mean) แต่การหาตำแหน่งกึ่งกลางที่เป็นที่นิยมใช้กันอย่างกว้างขวางที่สุดก็คือ มัชฌิมเลขคณิต ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยที่ใช้ได้กับข้อมูลที่อยู่มาตรวัดระดับช่วงและอัตราส่วน นอกจากนี้ยังมี Trimmed Means เป็นสถิติปรับแก้ค่ามัชฌิมเลขคณิตกรณีที่มีข้อมูลสุดโต่ง (Extreme Value) ส่วนฐานนิยมและมัธยฐานนั้นบางครั้งใช้กับข้อมูลที่อยู่ในมาตราวัดระดับนามบัญญัติและจัดอันดับ แต่ก็สามารถใช้ได้กับข้อมูลในมาตราการวัดระดับช่วงและ

อัตราส่วน ส่วนมัชฌิมเรขาคณิตและมัชฌิมฮาร์โมนิค จะใช้เฉพาะข้อมูลที่มีคุณลักษณะพิเศษบางอย่างเท่านั้น การคำนวณหาค่ากึ่งกลางของข้อมูลนั้นจะนำเสนอวิธีการดังนี้

1. มัชฌิมเลขคณิต
2. มัธยฐาน
3. ฐานนิยม
4. Trimmed Means

1. มัชฌิมเลขคณิต (Arithmetic mean)

มัชฌิมเลขคณิต หรือ คะแนนเฉลี่ย หมายถึง ผลรวมของข้อมูลที่ได้จากการวัดหารด้วยจำนวนข้อมูลที่ได้จากการวัด สมมติข้อมูลที่ได้จากการวัดคือ 7, 13, 22, 9, 11, 4 ผลรวมของข้อมูลชุดนี้คือ 66 ค่าเฉลี่ยจึงมีค่าเท่ากับ 66 หารด้วย 6 ดังนั้นคะแนนเฉลี่ยจะเท่ากับ 11

ในกรณีทั่วไป ถ้าข้อมูลที่ได้จากการวัด N จำนวน นำเสนอโดยใช้สัญลักษณ์ $X_1, X_2, \ldots, X_N$ และการหาค่าเฉลี่ยสามารถเขียนได้เป็นสูตร

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$$

สัญลักษณ์ $\overline{X}$ อ่านว่า เอ็กซ์บาร์ ใช้แทนคะแนนเฉลี่ยของข้อมูล อักษรกรีก $\sum_{i=1}^{N}$ อ่านว่าซิกม่า แทนผลรวมของข้อมูลที่ได้จากการวัด N จำนวน โดยรวมจากข้อมูลตัวที่ 1 จนถึง N หรือ i = 1 ถึง i = N รูปแบบง่ายของคะแนนเฉลี่ยที่นิยมเขียนกันคือ

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N}$$

การคำนวณคะแนนเฉลี่ยจากการแจกแจงความถี่

สมมติค่าคะแนนของ X ในแต่ละตัวมีค่าซ้ำกัน สามารถหาคะแนนเฉลี่ยได้โดยการแจกแจงความถี่ จากนั้นคูณค่าคะแนน X แต่ละค่ากับความถี่ แล้วนำมาบวกกันแล้วหารด้วยจำนวนข้อมูลทั้งหมด

สมมติข้อมูลที่ได้จากการวัดคือ 11, 11, 12, 12, 12, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 15, 15, 15, 16, 16, 17, 17, 18 สังเกตว่ามีผู้ได้คะแนน 11 อยู่ 2 คน มีผู้ได้คะแนน 12 อยู่ 3 คน ฯลฯ รวมข้อมูลทั้งหมด 20 คน สามารถนำมาเขียนเป็นตารางได้ดังนี้

X_i	f_i	f_iX_i
18	1	18
17	2	34
16	2	32
15	3	45
14	2	28
13	5	65
12	3	36
11	2	22
รวม	20	280

ตารางนี้เป็นตารางแจกแจงความถี่ในแต่ละชั้นที่มีอันตรภาคชั้นเป็น 1 สัญลักษณ์ f_i แทนความถี่ของคะแนนในชั้นที่ i คูณแต่ละค่าของ X_i ด้วยความถี่ f_i จะได้ค่าเป็น f_iX_i และบวกแต่ละค่าใน f_iX_i เราจะได้ผลรวมเท่ากับ 280 คะแนนจึงเท่ากับ 280 หารด้วย 20 เท่ากับ 14

เมื่อ $X_1, X_2, \ldots, X_k$ กับค่าความถี่ $f_1, f_2, \ldots, f_k$ เมื่อ k แทนจำนวนค่าคะแนนแต่ละค่าที่แตกต่างกัน รูปแบบสูตรคำนวณคะแนนเฉลี่ยเมื่อมีการแจกแจงความถี่คือ

$$\overline{X} = \frac{f_1X_1 + f_2X_2 + \ldots + f_kX_k}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_iX_i}{N}$$

การคำนวณคะแนนเฉลี่ยกรณีคะแนนที่ได้แต่ละค่ามีความสำคัญไม่เท่ากัน

สมมติคะแนนสอบของผู้สอบคนหนึ่งที่สอบด้วยแบบทดสอบ 4 ฉบับที่มีความสำคัญไม่เท่ากันดังตาราง

แบบทดสอบ ฉบับที่	คะแนน	ความสำคัญ
1	84	1
2	73	2
3	62	5
4	91	4
5	96	3

สังเกตว่าแบบทดสอบแต่ละฉบับมีน้ำหนักความสำคัญไม่เท่ากัน ในสูตร $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i X_i}{N}$ สำหรับข้อมูลที่แต่ละค่าคะแนนมีความสำคัญเท่ากัน แต่ในที่นี้แต่ละค่าคะแนนมีความสำคัญไม่เท่ากัน จึงประยุกต์มาเป็นสูตร

$$\overline{X}_W = \frac{W_1X_1 + W_2X_2 + \ldots + W_nX_n}{W_1 + W_2 + \ldots + W_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} W_iX_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i}$$

ดังนั้นคะแนนเฉลี่ยของผู้สอบคนนี้จึงเท่ากับ

$$\overline{X}_W = \frac{1(84)+2(73)+5(62)+4(91)+3(96)}{1+2+5+4+3} = \frac{1192}{15}$$

$$= 79.47$$

จากตารางแสดงราคาก๊าซโซลีนของเมืองต่าง ๆ 5 เมือง มีราคาต่อแกลลอนดังนี้

เมือง	ราคาต่อแกลลอน	จำนวนแกลลอนที่ซื้อ
1	1.53	17
2	1.46	21
3	1.49	16
4	1.53	11
5	1.51	19

ราคาเฉลี่ยต่อแกลลอนของก๊าซโซลีนเป็นเท่าใด

$$\overline{X}_W = \frac{17(1.53)+21(1.46)+16(1.49)+11(1.53)+19(1.51)}{17+21+16+11+19}$$

$$= 124.05/84$$

$$= 1.48$$

ราคาของก๊าซโซลีนเฉลี่ยต่อแกลลอนคือ 1.48

ความคลาดเคลื่อนของคะแนนเฉลี่ย (Standard error of the mean)

สมการประมาณค่าความคลาดเคลื่อนของคะแนนเฉลี่ยคือ

$$\mathrm{SEM} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

ค่า SEM เป็นค่าที่บ่งบอกถึงความคลาดเคลื่อนในการประมาณค่าคะแนนเฉลี่ยที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างไปยังค่าคะแนนเฉลี่ยของประชากร ถ้า SEM มีค่าน้อย การประมาณค่าคะแนนเฉลี่ยที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างไปยังค่าคะแนนเฉลี่ยของประชากรจะมีโอกาสถูกต้องมากขึ้น ดังนั้นคะแนนเฉลี่ยของประชากรจะมีค่าอยู่ระหว่าง $\overline{X} - \mathrm{SEM}$ จนถึง $\overline{X} + \mathrm{SEM}$

ค่า SEM นี้จะมีค่าสวนทางกับจำนวนของกลุ่มตัวอย่าง ถ้า N มีจำนวนมาก ค่า SEM จะมีค่าลดน้อยลง ดังนั้นจำนวนกลุ่มตัวอย่างยิ่งมาก การประมาณค่าคะแนนเฉลี่ยที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างไปยังค่าคะแนนเฉลี่ยของประชากรยิ่งมีโอกาสถูกต้องมากยิ่งขึ้น

2. มัธยฐาน (Median)

มัธยฐานเป็นค่าคะแนนที่อยู่กึ่งกลางของข้อมูล และแบ่งครึ่งข้อมูลออกเป็นสองส่วนเท่ากัน สมมติให้ X เป็นชุดของข้อมูลที่เก็บรวบรวมมาได้ และจัดเรียงข้อมูลจากต่ำไปหาสูงแล้ว ส่วน R คืออันดับที่ของข้อมูล

X	2	7	16	19	20	25	27
R	1	2	3	4	5	6	7

จากตัวอย่าง มัธยฐานคือ 19 ซึ่งเป็นค่าที่อยู่ในอันดับที่ 4 และแบ่งข้อมูลออกเป็นกลุ่มสูง 3 ค่าและกลุ่มต่ำ 3 ค่าเท่ากัน ถ้าเพิ่มค่า 31 เข้าไป มัธยฐานสามารถหาได้จากการหาค่าเฉลี่ยของข้อมูล 2 ค่าที่อยู่ตรงกลางคือ 19 และ 20 คือ (19 + 20)/2 = 19.5

ในกรณีที่ข้อมูลมีความถี่ดังตัวอย่าง

X	7	7	7	8	8	8	9	9	10	10
R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

ในที่นี้ สามารถคำนวณหาตำแหน่งของมัธยฐานได้โดยใช้สูตร (N+1)/2 ดังนั้นมัธยฐานของข้อมูลชุดนี้คือ 8

3. ฐานนิยม (Mode)

การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางอีกวิธีหนึ่งคือ ฐานนิยม เพื่อดูว่าค่าคะแนน X ใดบ้างที่มีโอกาสเกิดมากกว่าค่าอื่น ๆ ฐานนิยมดูได้จากค่าที่มีความถี่มากที่สุด สมมติข้อมูล 11, 11, 12, 12, 12, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 15, 15, 16, 16, 17, 17, 18 ในที่นี้ ค่า 13 มีความถี่ 5 ซึ่งมีความถี่มากที่สุด ดังนั้นฐานนิยมของข้อมูลชุดนี้คือ 13

สมมติค่าคะแนน X ทั้งหมดมีความถี่เท่ากันหมด ซึ่งความถี่นั้นอาจจะเท่ากับหรือมากกว่า 1 เช่น 2, 7, 16, 19, 20, 25, 27 ถือว่าไม่มีฐานนิยม

ในบางกรณีที่มีค่า X อยู่ 2 ค่าที่มีความถี่สูงสุดเท่ากัน ค่าฐานนิยมก็จะมี 2 ค่า สมมติข้อมูล 11, 11, 12, 12, 12, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 16, 16, 17, 18 ในที่นี้ ค่า 13 และ 14 มีความถี่เป็น 4 เท่ากัน ซึ่งเป็นความถี่ที่มากกว่าค่าอื่น ๆ ดังนั้นฐานนิยมคือ 13 และ 14

ฐานนิยมเป็นการหาค่ากลางที่หยาบที่สุด เหมาะสำหรับข้อมูลเชิงคุณภาพ

ตัวอย่างข้อมูลเชิงคุณภาพเช่นการสำรวจยี่ห้อคอมพิวเตอร์ Notebook ที่มีผู้ใช้มากที่สุดในมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง ปรากฏดังนี้

ยี่ห้อ Notebook	***จำนวนผู้ใช้***
IBM	18
TOSHIBA	16
FUJITSU	5
HP	11
DELL	3

การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางของข้อมูลชุดนี้ ก็คือในมหาวิทยาลัยแห่งนี้มีจำนวนผู้ใช้คอมพิวเตอร์ Notebook ยี่ห้อ IBM มากที่สุด ซึ่งมีความถี่สูงสุดคือ 18 ซึ่งข้อมูลชุดนี้สามารถหาได้เฉพาะฐานนิยมเท่านั้น ไม่สามารถหามัชฌิมเลขคณิตหรือมัธยฐานได้

4. Trimmed Means

การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางโดยใช้มัชฌิมเลขคณิตอาจจะมีความคลาดเคลื่อนไปถ้าหากข้อมูลมีค่าที่ผิดปกติไปจากกลุ่มหรือที่เรียกว่า Extreme Value ดังนั้นหากข้อมูลมีค่าผิดปกติแล้ว การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางที่เหมาะสมจะกลายเป็นค่ามัธยฐาน (Median) นักสถิติจึงได้แก้ไขปัญหานี้โดยคิดวิธีใหม่ขึ้นมาเรียกว่า Trimmed Means

Trimmed Means สามารถคำนวณได้โดยการเรียงลำดับข้อมูลจากน้อยไปมาก แล้วลบข้อมูลที่น้อยที่สุดและมากที่สุดออก จากนั้นคำนวณหามัชฌิมเลขคณิต จำนวนของข้อมูลที่จะถูกลบออกนั้นจะมีประมาณ 5% จนถึง 25% ของข้อมูลทั้งหมด

ตัวอย่าง ข้อมูลปริมาณการเก็บเกี่ยวพืชผลทางการเกษตร จำนวน 10 เดือน มีปริมาณดังนี้

6.5, 12.0, 14.9, 10.0, 10.7, 7.9, 21.9, 12.5, 14.5, 9.2

การจะคำนวณหา Trimmed Means อันดับแรกต้องเรียงข้อมูลจากน้อยไปหามากก่อนได้ดังนี้

6.5, 7.9, 9.2, 10.0, 10.7, 12.0, 12.5, 14.5, 14.9, 21.9

จากนั้น ลบข้อมูลที่มีค่าน้อยที่สุดและมากที่สุดออกอย่างละ 20% ข้อมูลมี 10 ค่า 20% ก็คือ 2 ค่า ลบข้อมูลน้อยที่สุดออก 1 ค่าคือ 6.5 และลบข้อมูลมากที่สุดออก 1 ค่า คือ 21.9 จะเหลือข้อมูลเพียง 6 ค่าคือ

7.9, 9.2, 10.0, 10.7, 12.0, 12.5, 14.5, 14.9

จากนั้นคำนวณหามัชฌิมเลขคณิตได้

20% trimmed mean = (7.9+9.2+10.0+10.7+12.0+12.5+14.5+14.9)/8

= 11.46

การตัดสินว่าจะลบข้อมูลออกกี่เปอร์เซ็นต์นั้น ขึ้นอยู่กับค่าที่ผิดปกติไปจากกลุ่ม (extreme value) ที่ปรากฏว่ามีจำนวนมากเพียงใด

ความสัมพันธ์ระหว่างมัชฌิมเลขคณิต มัธยฐานและฐานนิยม

ความสัมพันธ์ระหว่างมัชฌิมเลขคณิต มัธยฐานและฐานนิยม สามารถแสดงได้ด้วยการแจกแจงของข้อมูลที่มีลักษณะต่าง ๆ กัน ดังนี้

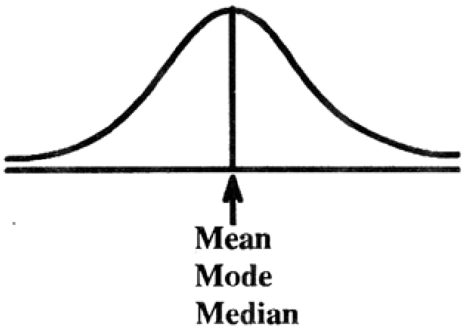
จากภาพประกอบ 2.1 นั่นคือ

1. หากข้อมูลมีการแจกแจงปกติแล้ว ค่ามัชฌิมเลขคณิต มัธยฐานและฐานนิยม จะเป็นค่าเดียวกัน (ภาพประกอบ 2.1 ก)

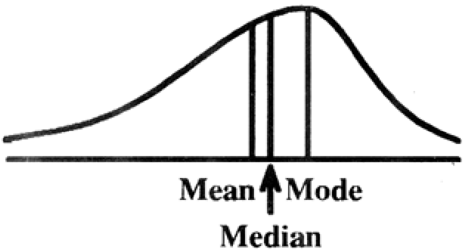
2. ถ้าการแจกแจงของข้อมูลมีความเบ้แล้ว ค่ามัธยฐานของข้อมูลจะอยู่ตรงกลางของการแจกแจงเสมอ (ภาพประกอบ 2.1)

3. ถ้าหากค่ามัธยฐานมากกว่ามัชฌิมเลขคณิต การแจกแจงของข้อมูลจะเป็นเบ้ทางลบ (ภาพประกอบ 2.1 ข)

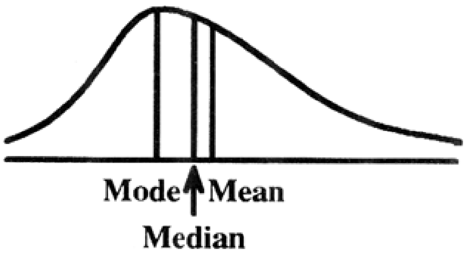
4. ถ้าหากค่ามัธยฐานน้อยกว่ามัชฌิมเลขคณิต การแจกแจงของข้อมูลจะเป็นเบ้ทางบวก (ภาพประกอบ 2.1 ค)



ก. รูปโค้งปกติ (Normal curve)



ข. รูปโค้งเบ้ทางลบ (Negatively skewed)



ค. รูปโค้งเบ้ทางบวก (Positively skewed)

ภาพประกอบ 2.1 ความสัมพันธ์ของมัชฌิมเลขคณิต มัธยฐานและฐานนิยม
(ชูศรี วงศ์รัตนะ. 2544 : 45 - 46)

การเลือกใช้วิธีการวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง

ชูศรี วงศ์รัตนะ (2544 : 45) ได้อธิบายวิธีการใช้การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางไว้ดังนี้

1. ถ้าข้อมูลอยู่ในมาตราช่วง (Interval Scale) หรือมาตราอัตราส่วน (Ratio Scale) จะใช้วิธีมัชฌิมเลขคคณิต มัธยฐาน หรือฐานนิยมก็ได้ โดยพิจารณาถึงลักษณะของการแจกแจงของข้อมูลด้วย

2. ถ้าข้อมูลอยู่ในมาตราเรียงอันดับ (Ordinal Scale) ใช้มัธยฐานหรือฐานนิยมก็ได้ แต่ฐานนิยมมักใช้เมื่อต้องการทราบค่าประมาณของแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางของข้อมูลชุดหนึ่งโดยเร็ว โดยที่ข้อมูลแต่ละชุดมีจำนวนไม่มากนัก

3. ถ้าข้อมูลอยู่ในมาตรานามบัญญัติ (Nominal Scale) ใช้ได้เฉพาะฐานนิยมเท่านั้น

ข้อสังเกตในการใช้วิธีวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง

ชูศรี วงศ์รัตนะ (2544 : 45 - 46) มีข้อสังเกตเกี่ยวกับการใช้วิธีวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางดังนี้

1. มัชฌิมเลขคณิตเป็นวิธีที่นิยมใช้มากที่สุด เพราะ

1.1 การหาค่ามัชฌิมเลขคณิตต้องนำทุก ๆ ค่าของข้อมูลมาเฉลี่ย ซึ่งทำให้ได้ค่าตัวเลขที่เป็นตัวแทนที่ดีของข้อมูลทั้งหมด (ถ้าข้อมูลชุดนั้นมีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ)

1.2 ข้อมูลชุดหนึ่งจะมีค่ามัชฌิมเลขคณิตเพียงค่าเดียว

1.3 จากการทดลองหาค่าแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางด้วยวิธีต่าง ๆ กับกลุ่มตัวอย่างหลาย ๆ ชุด ซึ่งสุ่มมาจากประชากรกลุ่มเดียวกัน พบว่า ค่ามัชฌิมเลขคณิตจะคงที่กว่าค่ามัธยฐานและฐานนิยม

1.4 ค่ามัชฌิมเลขคณิตจะนำไปใช้ในสถิติอื่น ๆ ได้อีก เช่น การทดสอบความแตกต่างระหว่างสองกลุ่ม (t-test)

2. มัชฌิมเลขคณิตเหมาะสำหรับใช้กับข้อมูลที่มีการแจกแจงปกติ

3. ถ้าข้อมูลมีการแจกแจงไม่เป็นโค้งปกติ หรือการแจกแจงเบ้ ไม่ควรใช้มัชฌิมเลขคณิต เพราะจะทำให้ได้ค่าที่ไม่เป็นตัวแทนที่ดีของข้อมูล ควรใช้มัธยฐานดีกว่า แต่ถ้าในจำนวนข้อมูลทั้งหมด มีข้อมูลบางค่าที่มีค่าสูงหรือต่ำกว่าข้อมูลอื่น ๆ มาก จะมีผลกระทบถึงการหามัชฌิมเลขคณิต ควรใช้มัธยฐานหรือฐานนิยมแทน หรืออาจใช้ Trimmed Means แทน

4. ถ้าข้อมูลมีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ ค่ามัชฌิมเลขคณิต มัธยฐานและฐานนิยมจะมีค่าเท่ากัน

5. ในข้อมูลชุดหนึ่งไม่จำเป็นต้องมีฐานนิยมเพียงค่าเดียว แต่ถ้าเป็นการใช้มัชฌิมเลขคณิตหรือมัธยฐาน ในข้อมูลชุดหนึ่งจะมีมัชฌิมเลขคณิตหรือมัธยฐานเพียงค่าเดียวเท่านั้น

6. ฐานนิยมมักใช้เมื่อต้องการทราบค่าการวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางโดยประมาณและรวดเร็ว และมักใช้กับข้อมูลที่มีจำนวนไม่มากนัก

7. ฐานนิยมหมายถึงค่าของข้อมูลตัวที่มีความถี่สูงที่สุด ไม่ใช่ค่าของความถี่

8. ในกรณีที่ข้อมูลเป็นประเภทเชิงคุณภาพ (Qualitative data) จะใช้ได้เฉพาะฐานนิยม

การวัดการกระจาย

สมมติข้อมูลที่ได้จากการวัดของกลุ่มผู้สอบ 2 กลุ่ม

กลุ่ม 1	10	12	15	18	20
กลุ่ม 2	2	8	15	22	28

เราจะพบว่า คะแนนเฉลี่ยของทั้ง 2 กลุ่มนี้เท่ากันคือ 15 แต่เมื่อพิจารณาให้ดีแล้วข้อมูลแต่ละค่าที่ได้จากการวัดของกลุ่ม 2 จะมีความแตกต่างกันมากกว่าข้อมูลในกลุ่ม 1 ในการจะทราบความแตกต่างของข้อมูลในแต่ละกลุ่มนั้น เราจะเรียกว่า การวัดการกระจาย ซึ่งมีวิธีการในการวัดการกระจายที่นำเสนอในบทนี้คือ

1. พิสัย (The Range)
2. ความแปรปรวนและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (The variance and standard deviations)
3. สัมประสิทธิ์ของการกระจาย (The coefficient of variation)
4. โมเมนท์รอบค่าเฉลี่ย (Moments about the mean) ความเบ้ และความโด่ง (Skewness and Kurtosis)

1. พิสัย (The range)

พิสัยเป็นการวัดการกระจายที่ง่ายที่สุด เป็นการหาความแตกต่างของข้อมูลสูงสุดและต่ำสุดของกลุ่ม กลุ่ม 1 มีข้อมูลคือ 10, 12, 15, 18 และ 20 คำนวณหาพิสัยได้ 20 ลบ 10 เท่ากับ 10 และกลุ่ม 2 มีข้อมูลคือ 2, 8, 15, 22 และ 28 คำนวณหาพิสัยได้ 28 ลบ 2 เท่ากับ 26 จะเห็นว่าข้อมูลกลุ่ม 2 จะมีค่าการกระจายมากกว่าข้อมูลในกลุ่ม 1

2. ความแปรปรวนและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (The variance and standard deviations)

ส่วนเบี่ยงเบนของข้อมูลแต่ละตัวกับคะแนนเฉลี่ยนั้นจะมีทั้งค่าบวกและค่าลบ ถ้านำส่วนเบี่ยงเบนนี้มาบวกกันจะได้ค่าเป็น 0 วิธีการหนึ่งที่นำเสนอในการแก้ไขค่าที่ติดลบก็คือการยกกำลังสองของค่าส่วนเบี่ยงเบนแต่ละตัวแล้วนำมาบวกกัน ผลที่ได้จะเป็นนิยามของการวัดการกระจาย เช่น คะแนนเฉลี่ยของข้อมูล 1, 4, 7, 10 และ 13 คือ 7 ส่วนเบี่ยงเบนของข้อมูลแต่ละตัวกับคะแนนเฉลี่ยเป็น -6, -3, 0, 3 และ 6 ยกกำลังสองจะได้ 36, 9, 0, 9, 36 แล้วนำมาบวกกันจะได้ 90

การวัดการกระจายที่นิยมใช้กันมากคือความแปรปรวน ซึ่งมีสูตรในการคำนวณความแปรปรวนว่า

$$s^2 = \frac{\Sigma(X-\overline{X})^2}{N}$$

สมมติข้อมูลชุดหนึ่งคือ 7, 8 และ 15 มีคะแนนเฉลี่ยคือ 10 และส่วนเบี่ยงเบนจากคะแนนเฉลี่ยคือ -3, -2, +5 ผลบวกของส่วนเบี่ยงเบนคือ (-3) + (-2) + 5 = 0 แต่ถ้านำส่วนเบี่ยงเบนมายกกำลังสองแล้วบวกกันจะได้ 9 + 4 + 25 = 38 ดังนั้นความแปรปรวนจะเท่ากับ 38/3 = 12.67 เมื่อถอดรากที่สองของความแปรปรวนจะได้ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ซึ่งมีสูตรคำนวณว่า

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma(X-\overline{X})^2}{N}}$$

ดังนั้นความแปรปรวน 12.67 เมื่อถอดรากที่สองแล้วจะได้ 3.56 ซึ่งก็คือค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ความแปรปรวนของข้อสอบที่ให้คะแนน 0 – 1

ตัวอย่างคะแนนของผู้สอบ 20 คน กับข้อสอบ 8 ข้อ โดยผู้สอบที่สอบข้อสอบถูกจะได้ 1 คะแนน และตอบผิดได้ 0 คะแนน ดังนี้ (สุรศักดิ์ อมรรัตนศักดิ์. 2536)

คนที่	ข้อที่								รวม
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
2	1	1	1	1	0	0	1	1	6
3	0	1	0	1	0	0	0	0	2
4	1	1	1	1	1	1	0	1	7
5	1	1	1	1	0	0	0	0	4
6	1	1	0	0	0	0	0	0	2
7	0	1	1	1	1	1	0	0	5
8	1	1	0	1	0	0	0	0	3
9	1	1	0	1	1	1	0	1	6
10	0	1	1	0	1	1	0	0	4
11	1	1	1	1	1	1	1	0	7
12	1	1	1	0	0	1	0	1	5
13	1	1	1	1	1	1	0	0	6
14	1	0	1	1	0	1	0	0	4
15	1	1	0	1	0	0	0	0	3
16	1	1	0	1	0	1	0	0	4
17	1	1	1	0	0	0	0	0	3
18	1	1	1	1	1	1	1	1	8
19	1	1	1	1	1	0	0	0	5
20	1	1	1	1	0	1	0	0	5
รวม	16	19	13	15	8	11	3	5	90
p_i	0.80	0.95	0.65	0.75	0.40	0.55	0.15	0.25	
q_i	0.20	0.05	0.35	0.25	0.60	0.45	0.85	0.75	
$s^2 = p_i q_i$	0.1600	0.0475	0.2275	0.1875	0.2400	0.2475	0.1275	0.1875	

สัดส่วนของคนตอบถูกในแต่ละข้อจะแสดงในแถว p_i และสัดส่วนของคนตอบผิดในแต่ละข้อจะแสดงในแถว q_i หรือ $1 - p_i$ ดังนั้น ข้อสอบข้อที่ 1 สัดส่วนคนตอบถูกคือ 16/20 = 0.80 และสัดส่วนของคนตอบผิดคือ 4/20 = 1 – 0.80 = 0.20 ดังนั้น $p_i + q_i = 1$

ดังนั้น p_i แทนสัดส่วนของคนตอบถูกในข้อที่ i สามารถคำนวณได้ด้วยสูตร

$$p_i = \frac{\Sigma X_i}{N}$$

เมื่อ X แทนคะแนนของข้อสอบแต่ละข้อที่เป็น 0 หรือ 1

และสังเกตว่า สูตร p_i ก็คือสูตรของคะแนนเฉลี่ย ดังนั้นสัดส่วนของคนตอบถูกในแต่ละข้อก็คือค่าเฉลี่ยของข้อสอบในแต่ละข้อนั่นเอง

$$\overline{X}_i = \frac{\Sigma X_i}{N}$$

ดังนั้น $p_i = \overline{X}_i$ และคะแนนเฉลี่ยของคะแนนผู้สอบทุกคนในแบบทดสอบจะเท่ากับผลรวมของคะแนนเฉลี่ยในแต่ละข้อ หรือ $\overline{X}_t = \Sigma\overline{X}_i$ นั่นคือ $\Sigma p_i = \Sigma\overline{X}_i = \overline{X}_t$

จากสมการของความแปรปรวน ที่ว่า

$$s^2 = \frac{\Sigma(X - \overline{X})^2}{N}$$

เมื่อพิจารณาข้อที่ i จะได้ว่า

$$s_i^2 = \frac{\Sigma(X_i - \overline{X}_i)^2}{N}$$

$$= \frac{\Sigma X_i^2}{N} + \frac{\Sigma\overline{X}_i^2}{N} - \frac{\Sigma X_i\overline{X}_i}{N} - \frac{\Sigma X_i\overline{X}_i}{N}$$

$$= \frac{\Sigma X_i^2}{N} + \frac{\Sigma\overline{X}_i^2}{N} - \frac{2\Sigma X_i\overline{X}_i}{N}$$

เพราะว่า $p_i = \overline{X}_i$ ดังนั้น

$$= \frac{\Sigma X_i^2}{N} + \frac{\Sigma p_i^2}{N} - \frac{2p_i\Sigma X_i}{N}$$

และเนื่องจากคะแนนรายข้อมีค่าเป็น 0 หรือ 1 ดังนั้น $X_i^2 = X_i$

$$\frac{\Sigma X_i^2}{N} = \frac{\Sigma X_i}{N} = p_i \quad \text{และ} \quad \frac{\Sigma p_i^2}{N} = \frac{Np_i^2}{N} = p_i^2$$

ดังนั้น

$$s_i^2 = p_i + p_i^2 - 2p_i\,p_i$$

$$= p_i + p_i^2 - 2p_i^2$$

$$= p_i - p_i^2$$

$$= p_i(1 - p_i)$$

ให้ $1 - p_i$ แทนด้วย q_i ดังนั้น

$$s_i^2 = p_i q_i$$

ดังนั้น $p_i q_i$ คือสูตรความแปรปรวนของข้อสอบรายข้อที่ให้คะแนนเป็น 0 หรือ 1 เท่ากับผลคูณสัดส่วนของคนที่ตอบข้อนั้นถูกกับสัดส่วนของคนที่ตอบข้อนั้นผิด ดังนั้นความแปรปรวนของข้อสอบข้อที่ 1 จะเท่ากับ 0.80(0.20) = 0.1600

สัดส่วนของการตอบถูกของข้อสอบ (p_i) เท่ากับความยากของข้อสอบ ถ้าข้อสอบยาก สัดส่วนของการตอบถูกจะต่ำ ถ้าข้อสอบง่ายสัดส่วนของการตอบถูกจะสูง ถ้านักเรียนทุกคนตอบถูกหมด (p_i = 1.00) หรือตอบผิดหมด (p_i = 0.00) นั่นคือข้อสอบที่ง่ายมากคนเก่งและคนอ่อนตอบถูกเหมือนกันหมด ส่วนข้อสอบที่ยากมากคนอ่อนและคนเก่งตอบผิดเหมือนกันหมด ย่อมเป็นข้อสอบที่ไม่มีประโยชน์ คือไม่สามารถจำแนกผู้เรียนเป็นกลุ่มเก่งและกลุ่มอ่อนได้

3. สัมประสิทธิ์ของการกระจาย (The Coefficient of Variation)

ในการเปรียบเทียบการกระจายของคะแนนนักเรียนในแต่ละกลุ่มหรือแบบทดสอบในแต่ละฉบับหรือในแต่ละรายวิชา เช่น แบบทดสอบ 2 ฉบับที่ประเมินผลความสามารถในการจำ แบบทดสอบฉบับแรกได้คะแนนเฉลี่ย 15 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 3.5 อีกฉบับหนึ่งได้คะแนนเฉลี่ย 75 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 10.5 แบบทดสอบฉบับไหนที่สามารถประเมินความสามารถในการจำได้ดีกว่ากัน พิจารณาจากค่าเฉลี่ยอาจจะคิดว่าเป็นแบบทดสอบฉบับที่ 2 ดังนั้นจึงทำการเปรียบเทียบการวัดการกระจายของแบบทดสอบสองฉบับนี้ด้วยการใช้สัมประสิทธิ์การกระจาย (Coefficient of Variation : CV) โดยการนำเอาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมาหารด้วยคะแนนเฉลี่ยด้วยสูตร

$$CV = \frac{s}{\overline{X}}$$

จากตัวอย่างข้างต้น แบบทดสอบฉบับแรกได้ CV = 3.5/15 = 0.233 และแบบทดสอบฉบับที่สอง CV = 10.5/75 = 0.14 จะเห็นว่าแบบทดสอบฉบับแรกมีสัมประสิทธิ์การกระจายสูงกว่าแบบทดสอบฉบับที่สอง ดังนั้นแบบทดสอบฉบับแรกจึงมีประสิทธิภาพในการจำแนกความสามารถของผู้สอบได้สูงกว่าฉบับที่สอง

อีกตัวอย่างหนึ่ง ในการสอบวัดนักเรียน 2 กลุ่มด้วยแบบทดสอบเลือกตอบความถนัดในการเรียน (SAT) กลุ่มแรกต้องอ่านบทความก่อนที่จะลงมือทำข้อสอบ อีกกลุ่มหนึ่งลงมือทำข้อสอบโดยไม่มีการอ่านบทความ ผลการทดสอบได้ผลดังนี้

	มีบทความ	ไม่มีบทความ
คะแนนเฉลี่ย	69.6	46.6
ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	10.6	6.8
สัมประสิทธิ์การกระจาย	0.156	0.146

อัตราส่วนของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานในกลุ่มมีบทความให้อ่านและกลุ่มไม่มีบทความให้อ่านมีค่าเท่ากับ 10.6/6.8 = 1.56 หมายถึงกลุ่มที่มีบทความให้อ่านมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานสูงกว่ากลุ่มไม่มีบทความให้อ่านถึง 50% แต่เมื่อพิจารณาที่สัมประสิทธิ์การกระจายจะเห็นว่ามีความใกล้เคียงกันมาก กลุ่มมีบทความให้อ่านและไม่มีบทความให้อ่านมีค่าสัมประสิทธิ์การกระจายเท่ากับ 0.156 และ 0.146 ตามลำดับ ดังนั้นในการเลือกใช้แบบทดสอบนั้นให้เลือกแบบทดสอบที่นักเรียนได้คะแนนสูงกว่านั่นคือใช้แบบทดสอบที่มีบทความให้อ่านประกอบ

4. โมเมนท์รอบค่าเฉลี่ย (Moments about the mean) ความเบ้ และความโด่ง (Skewness and Kurtosis)

โมเมนท์รอบค่าเฉลี่ย (Moments about the mean)

คะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีความสัมพันธ์กันเป็นชุดของสถิติพื้นฐานที่เรียกว่า โมเมนท์ โมเมนท์รอบค่าเฉลี่ย 4 ค่าแรกคือ

$$m_1 = \frac{\Sigma(X-\overline{X})}{N} = 0$$

$$m_2 = \frac{\Sigma(X-\overline{X})^2}{N} = \frac{N-1}{N}s^2$$

$$m_3 = \frac{\Sigma(X-\overline{X})^3}{N}$$

$$m_4 = \frac{\Sigma(X-\overline{X})^4}{N}$$

ดังนั้น โมเมนท์ที่ r เขียนได้ในรูป

$$m_r = \frac{\Sigma(X-\overline{X})^r}{N}$$

คำว่า “โมเมนท์” มีกำเนิดมาจากทางเครื่องกล เพื่อความเข้าใจจะยกตัวอย่างคานกระดกที่มีแกนรองคานอยู่ตรงกลาง ถ้าเรากำหนด X_1 เป็นระยะห่าง (distance) จากแกนรองคานซึ่งมีจำนวน f_1 ตัว แล้ว f_1X_1 จะเรียกว่าโมเมนท์ และถ้ากำหนด X_2 เป็นระยะห่างจากแกนรองคานซึ่งมีจำนวน f_2 ตัว แล้ว f_2X_2 จะเรียกว่าโมเมนท์ เมื่อนำโมเมนท์มารวมกันคือ $f_1X_1 + f_2X_2$ จะเรียกว่าโมเมนท์ที่หนึ่ง ถ้านำระยะห่างมายกกำลังสองก็จะได้โมเมนท์ที่สอง ถ้านำระยะห่างมายกกำลังสามก็จะได้โมเมนท์ที่สาม ฯลฯ เมื่อเรานำไปเปรียบเทียบกับการแจกแจงความถี่ ค่ากึ่งกลางหรือคะแนนเฉลี่ยของการแจกแจงก็เปรียบได้กับแกนรองคานกระดก และความถี่ในแต่ละค่าของคะแนนก็เปรียบได้กับจำนวนของระยะห่าง

สังเกตจากสมการ โมเมนท์ที่หนึ่งมีค่าเป็น 0 (โมเมนท์ในทางเครื่องกลที่เป็นช่วงห่างจากแกนรองคานจะไม่มีค่าติดลบ แต่โมเมนท์ในทางสถิติที่เป็นช่วงห่างจากค่าเฉลี่ยจะมีค่าติดลบ

ช่วงห่างของคะแนนที่มากกว่าคะแนนเฉลี่ยจะมีค่าเป็นบวก และช่วงห่างของคะแนนที่น้อยกว่าคะแนนเฉลี่ยจะมีค่าติดลบ ดังนั้นผลรวมจึงมีค่าเป็นศูนย์) และโมเมนท์ที่สองจะมีค่าเป็น (N - 1)/N เท่าของความแปรปรวน โมเมนท์ที่ 3 ใช้ในการคำนวณความเบ้ และโมเมนท์ที่ 4 ใช้ในการคำนวณความโด่ง

ความเบ้และความโด่ง (Measures of skewness and kurtosis)

การหาความเบ้นั้นต้องใช้โมเมนท์ที่ 2 และโมเมนท์ที่ 3 ในการคำนวณด้วยสูตร

$$g_1 = \frac{m_3}{m_2\sqrt{m_2}}$$

หรือใช้ค่าเฉลี่ยและมัธยฐานในการคำนวณด้วยสูตร

$$g_1 = \frac{3(\overline{X} - \text{median})}{s}$$

ในกรณีที่การแจกแจงมีลักษณะสมมาตรนั้น $g_1 = 0$ ถ้าการแจกแจงมีลักษณะเบ้บวก (positively skewed) ค่า g_1 จะมีค่าเป็นบวก ถ้าการแจกแจงมีลักษณะเบ้ลบ (negatively skewed) ค่า g_1 จะมีค่าติดลบ

สำหรับการวัดความโด่งนั้นจะใช้ค่าโมเมนท์ที่ 2 และ 4 ในการคำนวณด้วยสูตร

$$g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3$$

ในกรณีที่การแจกแจงเป็นโค้งปกติ ค่า $g_2 = 0$ ถ้าค่า g_2 ต่ำกว่า 0 การแจกแจงมีลักษณะแบนราบ (platykurtic) และถ้าค่า g_2 มากกว่า 0 การแจกแจงมีลักษณะโด่งสูง (leptokurtic)

สังเกตสูตรในการคำนวณค่าความโด่ง จะมีการลบด้วย 3 แต่ในตำราบางเล่มจะไม่มีการลบ 3 ดังนั้นสูตรการคำนวณหาความโด่งจะกลายเป็น $g_2 = \frac{m_4}{m_2^2}$ และการแปลความหมายจะเปลี่ยนไปคือ กรณีที่การแจกแจงเป็นโค้งปกติ ค่า $g_2 = 3$ ถ้าค่า g_2 ต่ำกว่า 3 การแจกแจงมีลักษณะแบนราบ (platykurtic) และถ้าค่า g_2 มากกว่า 3 การแจกแจงมีลักษณะโด่งสูง (leptokurtic)

คะแนนมาตรฐาน

คะแนนที่ได้จากการวัดโดยทั่วไปมักจะเรียกว่า คะแนนดิบ (Raw Score) และจะถูกนำเสนอเป็นค่าคะแนน (X) ค่าเฉลี่ย ($\overline{X}$) และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) เมื่อเราพิจารณาถึงผลต่างระหว่างค่าคะแนน (X) กับค่าเฉลี่ย ($\overline{X}$) จะได้ $X - \overline{X}$ เราแทนค่าด้วย x เรียก x นี้ว่า

คะแนนเบี่ยงเบน (Deviation Score) โดยคะแนนเบี่ยงเบน (x) นี้ มีค่าเฉลี่ย ($\bar{x}$) เท่ากับ 0 และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD_x) เท่ากับ SD ของคะแนนที่วัดได้ (X)

เมื่อนำคะแนนเบี่ยงเบน (x) มาหารด้วยค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD_x หรือ SD) เราจะได้คะแนนมาตรฐาน (Standard Score) ซึ่งใช้ z เป็นสัญลักษณ์ จึงเรียกคะแนนมาตรฐานนี้ว่า คะแนนซี (z-score) ดังนั้น

$$z = \frac{X - \bar{X}}{SD} = \frac{x}{SD}$$

โดยคะแนนซีมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 1.00

ดังตัวอย่างแสดงคะแนนดิบ คะแนนเบี่ยงเบนและคะแนนมาตรฐาน ดังตาราง 2.1

ตาราง 2.1 คะแนนดิบ คะแนนเบี่ยงเบน และคะแนนมาตรฐาน

คนที่	X	x	z
1	3	-7	-1.11
2	6	-4	-0.63
3	7	-3	-0.47
4	9	-1	-0.16
5	15	5	0.79
6	20	10	1.58
Σ	60	0.00	0.00
Mean	10	0.00	0.00
SD	6.32	6.32	1.00

คะแนนมาตรฐานมีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 1 สังเกตคนที่ 1 มีคะแนนมาตรฐานเป็น -1.11 ทั้งนี้เพราะคะแนนที่ได้ต่ำกว่าค่าเฉลี่ย ส่วนคนที่ 6 มีคะแนนมาตรฐานเป็น 1.58 ทั้งนี้เพราะคะแนนที่ได้อยู่สูงกว่าค่าเฉลี่ย

ประยุกต์ใช้ z-score กับผลการสอบในวิชาภาษาอังกฤษและคณิตศาสตร์ และสมมติค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานดังนี้

วิชา	$\bar{X}$	SD
อังกฤษ	65	8
คณิตศาสตร์	52	12

ความสัมพันธ์ของผลการสอบในแต่ละกลุ่มวิชา คะแนน 65 ในกลุ่มผู้สอบอังกฤษมีความเท่าเทียมกับคะแนน 52 ในวิชาคณิตศาสตร์ ถ้ามีเด็กคนหนึ่งสอบวิชาอังกฤษได้ 57 คะแนน และคณิตศาสตร์ได้ 58 คะแนน เราสามารถเปรียบเทียบผลการสอบทั้ง 2 วิชานี้โดยใช้คะแนนมาตรฐาน วิชาภาษาอังกฤษมีคะแนนมาตรฐาน (57 - 65)/8 = -1.0 และคณิตศาสตร์ (58 - 52)/12 = 0.5 คะแนนมาตรฐานวิชาภาษาอังกฤษติดลบแสดงว่าคะแนน 57 เป็นคะแนนที่อยู่ต่ำกว่าค่าเฉลี่ย ขณะที่คะแนนมาตรฐานวิชาคณิตศาสตร์เป็น 0.5 แสดงว่าคะแนน 58 เป็นคะแนนที่อยู่สูงกว่าค่าเฉลี่ย เราอาจจะกล่าวได้ว่า เด็กคนนี้มีผลการสอบวิชาอังกฤษแย่กว่าวิชาคณิตศาสตร์

การวัดความสัมพันธ์

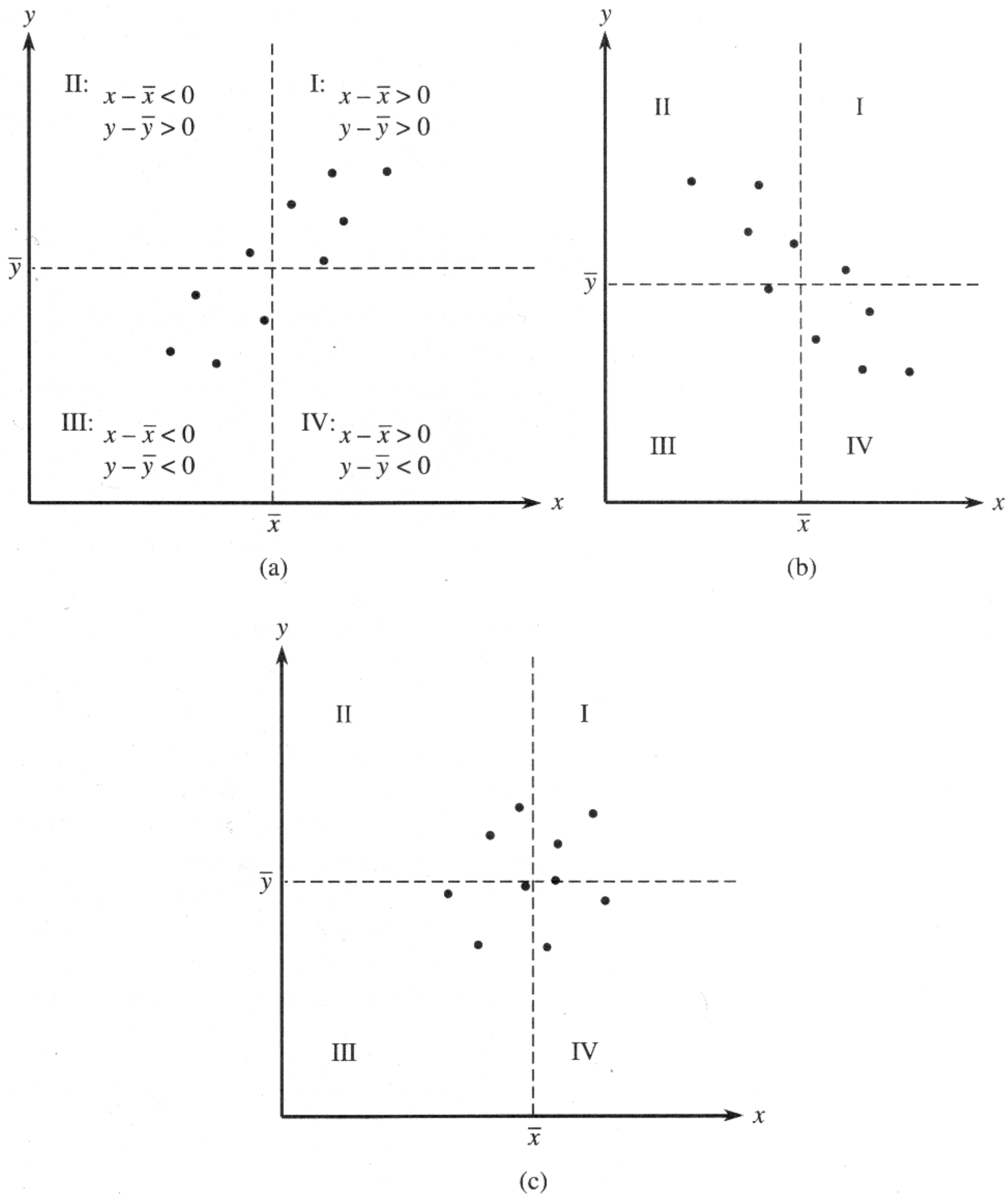
ในการวัดความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร 2 ตัวนั้น มีวิธีทางสถิติอยู่หลายวิธี แต่ในที่นี้จะนำเสนอ 2 วิธีคือ กรณีที่เป็นความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร 2 ตัวที่มีข้อมูลอยู่ในระดับการวัดช่วงหรืออัตราส่วน (Interval scale or Ratio scale) จะใช้การหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบเพียร์สัน (Pearson Product Moment Correlation Coefficient) แต่ในกรณีที่ข้อมูลอยู่ระดับการวัดเรียงอันดับ (Ordinal scale) จะใช้การหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบสเปียร์แมน (The Spearman Rank Order Correlation Coefficient)

1. สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบเพียร์สัน (Pearson Product Moment Correlation Coefficient)

แผนภาพกระจัดกระจายแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล 2 ชุดคือ X และ Y ดังแสดงในภาพประกอบ 2.2 จะบ่งบอกถึงความสัมพันธ์ในรูปแบบต่าง ๆ อย่างในภาพประกอบ 2.2(a) จะเป็นความสัมพันธ์ทางบวกระหว่าง X และ Y นั่นคือในทุก ๆ คู่ของค่า X และ Y ที่พล็อตลงไปนั้น เมื่อค่า X มีค่าเพิ่มขึ้นแล้วค่า Y ก็จะมีค่าเพิ่มขึ้นด้วย ส่วนในภาพประกอบ 2.2(b) จะแสดงการเพิ่มของค่า X และ Y ในทิศทางตรงกันข้าม ก็คือเมื่อ X มีค่าเพิ่มขึ้นแล้ว Y จะมีค่าลดลง จะเรียกว่ามีความสัมพันธ์ทางลบ ส่วนในภาพประกอบ 2.2(c) แสดงความไม่สัมพันธ์กันระหว่าง X และ Y ก็คือเมื่อ X เพิ่มขึ้น Y อาจจะลดหรือเพิ่มขึ้นก็ได้

ให้ $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ แทนคู่ของตัวแปร (X, Y) ในภาพประกอบ 2.2(a) จะมีเส้นตรงตั้งฉากกับแกนนอนที่ $\bar{X}$ และเส้นตรงตั้งฉากกับแกนตั้งที่ $\bar{Y}$ แบ่งแผนภาพออกเป็น 4 ส่วน ในส่วนที่ 1 ทั้งค่า X และ Y จะมีค่าสูงกว่าคะแนนเฉลี่ย ดังนั้นคะแนนเบี่ยงเบน $X - \bar{X}$ และ $Y - \bar{Y}$ จะมีค่าเป็นบวก ดังนั้น $(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$ จึงมีค่าเป็นบวกด้วย เหมือนกับในส่วนที่ 3 ที่มีค่าเป็นบวกเช่นเดียวกันเพราะคะแนนเบี่ยงเบน $X - \bar{X}$ และ $Y - \bar{Y}$ มีค่าติดลบ เมื่อนำมาคูณกันจึงมีค่าเป็นบวก ในส่วนที่ 2 และ 4 จะมีค่า $(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$ เป็นลบ ในภาพประกอบ 2.2(a)

นี้ เกือบทุกจุดจะอยู่ในส่วนที่ 1 และ 3 ซึ่งจะให้ผลเป็นบวก ดังนั้น $\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$ จึงมีค่าเป็นบวก



ภาพประกอบ 2.2 แผนภาพกระจัดกระจายแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร x และ y

เหตุผลเดียวกันในภาพประกอบ 2.2(b) ซึ่งจะแสดงความสัมพันธ์ทางลบ เกือบทุกจุดจะอยู่ในส่วนที่ 2 และ 4 ซึ่งจะมีค่า $(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$ เป็นลบ ดังนั้น $\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$ จึงมีค่าเป็นลบ ส่วนในภาพประกอบ 2.2(c) ทุก ๆ จุดจะอยู่ในส่วนที่ 1, 2, 3 และ 4 ในปริมาณที่พอกัน ดังนั้นผลของ $\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$ จึงมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ โดยสรุปแล้ว $\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$ สามารถบอกระดับ

ของความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร x และ y ได้ว่ามีความสัมพันธ์ทางบวก มีความสัมพันธ์ทางลบหรือไม่มีความสัมพันธ์

ต่อมาได้มีการนำ $\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$ มาพัฒนาเป็นสมการในการคำนวณหาความสัมพันธ์ที่เป็นที่นิยมกันอย่างแพร่หลาย เรียกว่า “สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบเพียร์สัน”

เมื่อ $\bar{X}$ และ s_X แทนคะแนนเฉลี่ยและคะแนนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่า X ในคู่ของ $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ และให้ $\bar{Y}$ และ s_Y แทนคะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่า Y แล้ว สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เพียร์สัน (r) เขียนเป็นสมการว่า

$$r = \frac{\Sigma(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{(N-1)s_X s_Y}$$

ตัวอย่าง ผลการสังเกตพฤติกรรม 2 ชนิด คือพฤติกรรม X และพฤติกรรม Y ด้วยแบบสังเกตกับนักเรียน 8 คน ได้ผลคะแนนดังตารางต่อไปนี้

คนที่	1	2	3	4	5	6	7	8
พฤติกรรม X	2.4	3.4	4.6	3.7	2.2	3.3	4.0	2.1
พฤติกรรม Y	1.33	2.12	1.80	1.65	2.00	1.76	2.11	1.63

คำนวณหาค่าต่าง ๆ ได้ดังนี้

$\Sigma X = 25.7$ $\quad \Sigma X^2 = 88.31$ $\quad s_X^2 = 0.821250$ $\quad s_X = 0.906228$

$\Sigma Y = 14.40$ $\quad \Sigma Y^2 = 26.4324$ $\quad s_Y^2 = 0.073200$ $\quad s_Y = 0.270555$

คะแนนเฉลี่ย $\bar{X} = 25.7/8 = 3.2125$ และ $\bar{Y} = 14.40/8 = 1.8000$

$$\begin{aligned}
\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) &= (X_1 - \bar{X})(Y_1 - \bar{Y}) + \ldots + (X_8 - \bar{X})(Y_8 - \bar{Y}) \\
&= (2.4 - 3.2125)(1.33 - 1.8000) + \ldots \\
&\quad + (2.1 - 3.2125)(1.63 - 1.8000) \\
&= 0.3819 + \ldots + 0.1891 \\
&= 0.5960
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$r = \frac{0.5960}{7(0.9062)(0.2706)} = 0.347$$

ผลของค่าสหสัมพันธ์ก็คือ r = 0.347 บ่งบอกสหสัมพันธ์ทางบวกที่ค่อนข้างต่ำ

สมการในการคำนวณค่าสหสัมพันธ์อีกสมการหนึ่งที่ไม่จำเป็นต้องใช้คะแนนเบี่ยงเบนในการคำนวณก็คือ

$$r = \frac{\Sigma XY - \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N}}{\sqrt{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}}\sqrt{\Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{N}}}$$

หรือเขียนในอีกรูปหนึ่งได้ว่า

$$r = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}}$$

จากข้อมูลข้างต้น สามารถคำนวณหาค่า r ได้ดังนี้

X	Y	X^2	Y^2	XY
2.4	1.33	5.76	1.7689	3.192
3.4	2.12	11.56	4.4944	7.208
4.6	1.80	21.16	3.2400	8.280
3.7	1.65	13.69	2.7225	6.105
2.2	2.00	4.84	4.0000	4.400
3.3	1.76	10.89	3.0976	5.808
4.0	2.11	16.00	4.4521	8.440
2.1	1.63	4.41	2.6569	3.423
$\Sigma X = 25.7$	$\Sigma Y = 14.40$	$\Sigma X^2 = 88.31$	$\Sigma Y^2 = 26.4324$	$\Sigma XY = 46.856$

แทนค่าในสมการได้

$$r = \frac{46.856 - \frac{(25.7)(14.40)}{8}}{\sqrt{88.31 - \frac{(25.7)^2}{8}}\sqrt{26.4324 - \frac{(14.40)^2}{8}}}$$

$$= \frac{0.5960}{(2.3977)(0.7158)}$$

$$= 0.347$$

หรืออาจจะเขียนสมการในรูปของคะแนนมาตรฐานได้ว่า

$$r = \frac{\Sigma Z_X Z_Y}{N}$$

และเขียนอยู่ในรูปของความแปรปรวนร่วมได้ว่า

$$r = \frac{COV_{XY}}{s_X s_Y}$$

เมื่อ COVxy $= \Sigma XY - \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N}$

2. สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบสเปียร์แมน (The Spearman Rank Order Correlation Coefficient)

ในการวิเคราะห์สหสัมพันธ์สำหรับข้อมูลที่เป็นแบบจัดลำดับ สามารถใช้การวิเคราะห์สหสัมพันธ์สเปียร์แมนคำนวณค่าสหสัมพันธ์ออกมาได้ มีสูตรในการคำนวณสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์สเปียร์แมน (r_s) คือ

$$r_s = 1-\frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}$$

เมื่อ r_s คือ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์สเปียร์แมน

ΣD^2 คือ ผลรวมกำลังสองของผลต่าง

N คือ จำนวนคู่ในการเรียงลำดับ

สหสัมพันธ์สเปียร์แมน สามารถคำนวณได้ด้วยข้อมูลที่อยู่ในรูปแบบจัดลำดับ หรืออาจจะเป็นคะแนนที่แปลงเป็นลำดับที่แล้ว ตัวอย่างในการคำนวณแสดงในตาราง 1 เป็นตัวอย่างของครูที่จัดลำดับผลงาน 2 ชิ้นของนักเรียน 10 คน คือ “ภาพวาดเหมือนจริง” และ “ภาพวาดจากจินตนาการ” ความสัมพันธ์ระหว่าง 2 ตัวแปรนี้เป็นเท่าไหร่

สังเกตว่าในแต่ละคู่จะต้องคำนวณหาผลต่างของลำดับ (D) จากนั้นนำผลต่างมายกกำลังสอง (D^2) และรวมกันในแนวสดมภ์กลายเป็น ΣD^2 เราจะได้ $\Sigma D^2 = 18$ และ N = 10 แทนค่าในสูตรจะได้ $r_s = 0.89$ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์สเปียร์แมน 0.89 จะเป็นตัวบ่งชี้ถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร “ภาพวาดเหมือนจริง” และ “ภาพวาดจากจินตนาการ” ที่ถูกจัดลำดับโดยครู

ตาราง 2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างการจัดลำดับของครูที่จัดลำดับตัวแปร “ภาพวาดเหมือนจริง” และ “ภาพวาดจากจินตนาการ”

นักเรียน	ภาพวาดเหมือนจริง	ภาพวาดจากจินตนาการ	D	D^2
1	2	1	1	1
2	4	3	1	1
3	1	2	1	1
4	8	8	0	0
5	3	6	3	9
6	6	4	2	4
7	9	10	1	1
8	5	5	0	0
9	10	9	1	1
10	7	7	0	0
				$\Sigma D^2 = 18$

แทนค่าในสูตรคำนวณ ได้ค่าดังนี้

$$r_s = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6(18)}{10(100-1)}$$

$$= 1 - \frac{108}{990} = 1 - 0.11$$

$$= 0.89$$

การแปลงข้อมูลตัวเลขให้เป็นข้อมูลจัดลำดับ

เมื่อมีตัวแปรตัวหนึ่งหรือทั้งสองตัวแปรที่จะนำมาหาความสัมพันธ์อยู่ในรูปของตัวเลข จะต้องนำมาจัดลำดับเสียก่อน โดยตัวเลขสูงสุดจะได้ลำดับที่ 1 และสูงสุดเป็นอันดับรองลงมาจะได้ลำดับที่ 2 จัดลำดับไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งถึงเลขที่น้อยที่สุดและถูกจัดอยู่ในอันดับสุดท้าย

ตาราง 2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างเปอร์เซ็นต์ของการชนะ และเงินบำรุงทีมของทีมฟุตบอล

ทีม	เปอร์เซ็นต์ของการชนะ	เงินบำรุงทีม (ล้านดอลล่าร์)	R_1	R_2	D	D^2
Toronto	0.586	52	1	1	0	0
New York	0.543	46	3	2	1	1
Baltimore	0.525	29	5.5	10	4.5	20.25
Detroit	0.525	37	5.5	6	0.5	0.25
Boston	0.494	45	9	3	6	36
Chicago	0.580	42	2	4	2	4
Kansas City	0.519	40	7	5	2	4
Cleveland	0.469	19	10	14	4	16
Minnesota	0.438	27	11.5	11.5	0	0
Milwaukee	0.426	25	13	13	0	0
Texas	0.531	35	4	8	4	16
Seattle	0.506	33	8	9	1	1
California	0.438	27	11.5	11.5	0	0
Oakland	0.420	36	14	7	7	49
						$\Sigma D^2 = 147.50$

ตัวอย่างในตาราง 2.3 กลุ่มตัวอย่างเป็นทีมฟุตบอล 14 ทีม และตัวแปรที่ต้องการหาความสัมพันธ์ก็คือเปอร์เซ็นต์ของการชนะและเงินบำรุงทีม ซึ่งข้อมูลดั้งเดิมจะเป็นตัวเลขแสดงจำนวน นำมาจัดลำดับโดยตัวเลขที่มากที่สุดเป็นลำดับ 1 ถ้าตัวเลขใดซ้ำกัน ให้หาลำดับที่เฉลี่ย เช่นทีม Baltimor และ Detroit มีบันทึกเปอร์เซ็นต์ของการชนะคือ 0.525 ซึ่งทั้ง 2 ทีมควรจะถูกจัดอยู่ในลำดับที่ 5 และ 6 ดังนั้นเราจะหาลำดับที่เฉลี่ยก็คือ (5 + 6)/2 จะได้ลำดับ 5.5 ทำนองเดียวกันกับทีม Minnesota และ California ที่มีการบันทึกเปอร์เซ็นต์ของการชนะเป็น 0.438 ซึ่งทั้ง 2 ทีมควรจัดอยู่ในลำดับที่ 11 และ 12 ดังนั้นลำดับที่โดยเฉลี่ยของทั้ง 2 ทีมนี้คือ 11.5

แทนค่าสูตรในการคำนวณ ได้ค่าสหสัมพันธ์ดังนี้

$$r_s = 1-\frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)} = 1-\frac{6(147.5)}{14(196-1)}$$
$$= 1-\frac{885}{2730} = 1 - 0.32$$
$$= 0.68$$

คุณสมบัติของค่าสหสัมพันธ์

1. ค่าสหสัมพันธ์ ไม่ขึ้นกับหน่วยในการวัดของตัวแปรทั้งสอง ถ้า X เป็นการวัดความสูงของนักเรียน ซึ่งอาจจะมีหน่วยเป็นเมตร ถ้าหากเปลี่ยนหน่วยมาเป็นนิ้ว หรือ เซนติเมตรแล้ว ค่าสหสัมพันธ์ที่คำนวณได้จะไม่เปลี่ยนแปลง หรือ y คืออุณหภูมิ อาจจะเป็นองศาเซลเซียสหรือเปลี่ยนมาเป็นองศาฟาเรนไฮท์ ค่าสหสัมพันธ์ที่คำนวณได้ก็ยังคงเดิม

2. ค่าสหสัมพันธ์ อยู่ระหว่าง –1.00 ถึง 1.00 ถ้าหากค่า r มีค่ามากกว่า 0 แล้วจะเป็นความสัมพันธ์ทางบวก ถ้าหากมีค่าน้อยกว่า 0 แล้วจะเป็นความสัมพันธ์ทางลบ ผลการวัดทั้งสองชุดจะสัมพันธ์กันสูง ปานกลางหรือต่ำมีเกณฑ์ดังนี้

สัมพันธ์กันสูง	$r \geq 0.80$ หรือ $r \leq -0.80$
สัมพันธ์กันปานกลาง	$0.50 < r < 0.80$ หรือ $-0.80 < r < -0.50$
สัมพันธ์กันต่ำ	$-0.50 \leq r \leq 0.50$
ไม่สัมพันธ์กัน	$r = 0$

การแจกแจงของคะแนนรูปแบบต่าง ๆ

ในที่นี้จะกล่าวถึงความแตกต่างของการแจกแจงคะแนนในลักษณะต่าง ๆ ซึ่งสิ่งที่สำคัญที่จะช่วยให้ทราบลักษณะของการแจกแจงมีอยู่ 4 ประการคือ ตำแหน่งกึ่งกลาง, ความแปรปรวน, ความเบ้ และความโด่ง เมื่อเราทราบค่าทั้ง 4 แล้ว เราจะสามารถทราบลักษณะของการแจกแจงของข้อมูลได้ ตำแหน่งกึ่งกลาง เป็นการวัดค่าที่อยู่ตรงกลางของการแจกแจงในที่นี้คือค่าเฉลี่ย

ความแปรปรวน บอกการกระจายของข้อมูล ถ้าข้อมูลทั้งหมดมีค่าเข้าใกล้ค่าเฉลี่ย ความแปรปรวนจะมีค่าน้อย ความเบ้ บอกความสมมาตรหรือไม่สมมาตรของการแจกแจงความถี่ ถ้าการแจกแจงไม่สมมาตรแล้ว ความถี่ส่วนใหญ่มีค่าต่ำและความถี่ส่วนน้อยมีค่าสูง การแจกแจงจะเป็นเบ้บวก (Positively Skewed) ในทางตรงกันข้าม ถ้าความถี่ส่วนใหญ่มีค่าสูงและความถี่ส่วนน้อยมีค่าต่ำ การแจกแจงความถี่จะเป็นเบ้ลบ (Negatively Skewed) ความโด่ง บอกลักษณะของการแจกแจงว่าโด่งมากหรือโด่งน้อย ถ้าการแจกแจงหนึ่งมีปลายยอดสูงมากเราจะเรียกว่า Leptokurtic ถ้าปลายยอดต่ำเรียกว่า Platykurtic

จากตาราง 2.4 การแจกแจงความถี่ในสดมภ์ 2 เป็นการแจกแจงแบบโค้งระฆังคว่ำหรือการแจกแจงปกติ ซึ่งมีความสำคัญมากในการจัดกระทำทางสถิติ การแจกแจงปกติมีสมการดังนี้

$$Y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(X-\mu)^2/2\sigma^2}$$

เมื่อ Y คือ ความสูงของโค้งเมื่อพล็อตค่าบนแกน X

π คือ ค่าคงที่ = 3.1416

e คือ Nepierian logarithms = 2.7183

N คือ จำนวนข้อมูล ซึ่งหมายถึงพื้นที่รวมภายใต้โค้งปกติมีจำนวน N

μ และ σ คือ ค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจง

หรือเขียนในรูปของคะแนนมาตรฐาน ซึ่งคะแนนมาตรฐานมีค่าเฉลี่ย 0 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 1 ดังนั้น $\mu = 0$ และ $\sigma = 1$ พื้นที่ภายใต้โค้งจะมี N = 1 สามารถเขียนในรูปสมการดังนี้

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

เมื่อ z คือคะแนนมาตรฐานบนแกน X และค่า z เท่ากับ $(X - \mu)/\sigma$

โค้งปกติมีลักษณะดังนี้

1) โค้งมีลักษณะสมมาตร ค่าเฉลี่ย ฐานนิยม และมัธยฐานมีค่าเท่ากัน

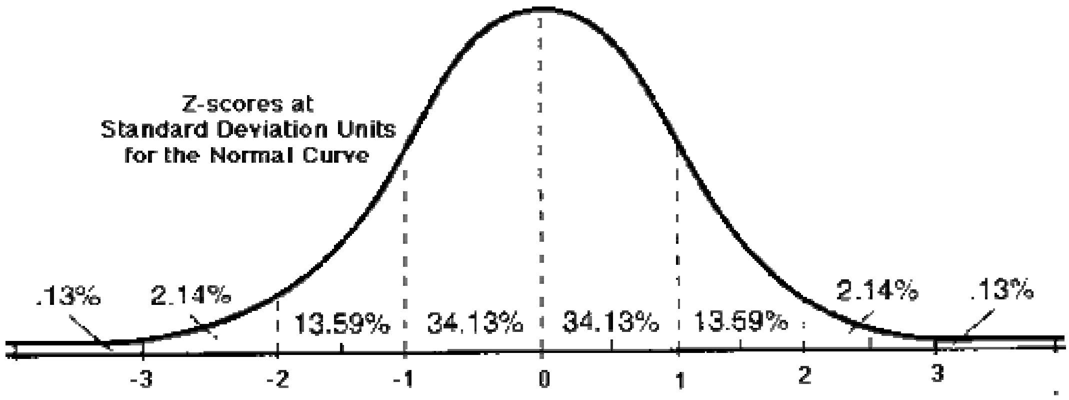
2) จุดที่สูงที่สุดของโค้งจะอยู่ที่ค่าเฉลี่ยมี z = 0 และมีความสูง = 0.3989

3) ปลายทั้ง 2 ข้างของโค้งจะไม่สัมผัสแกนนอน แต่จะมีค่าเป็นอนันต์ (infinity)

4) จุดที่มีการเปลี่ยนแปลงมากที่สุดคือจุด –1 และ +1 ของความเบี่ยงเบนจากค่าเฉลี่ยที่อยู่ต่ำและเหนือกว่าค่าเฉลี่ย

5) จะมีพื้นที่ประมาณ 68% ที่อยู่ใต้โค้งระหว่าง –1 และ +1 ของความเบี่ยงเบนจากค่าเฉลี่ย

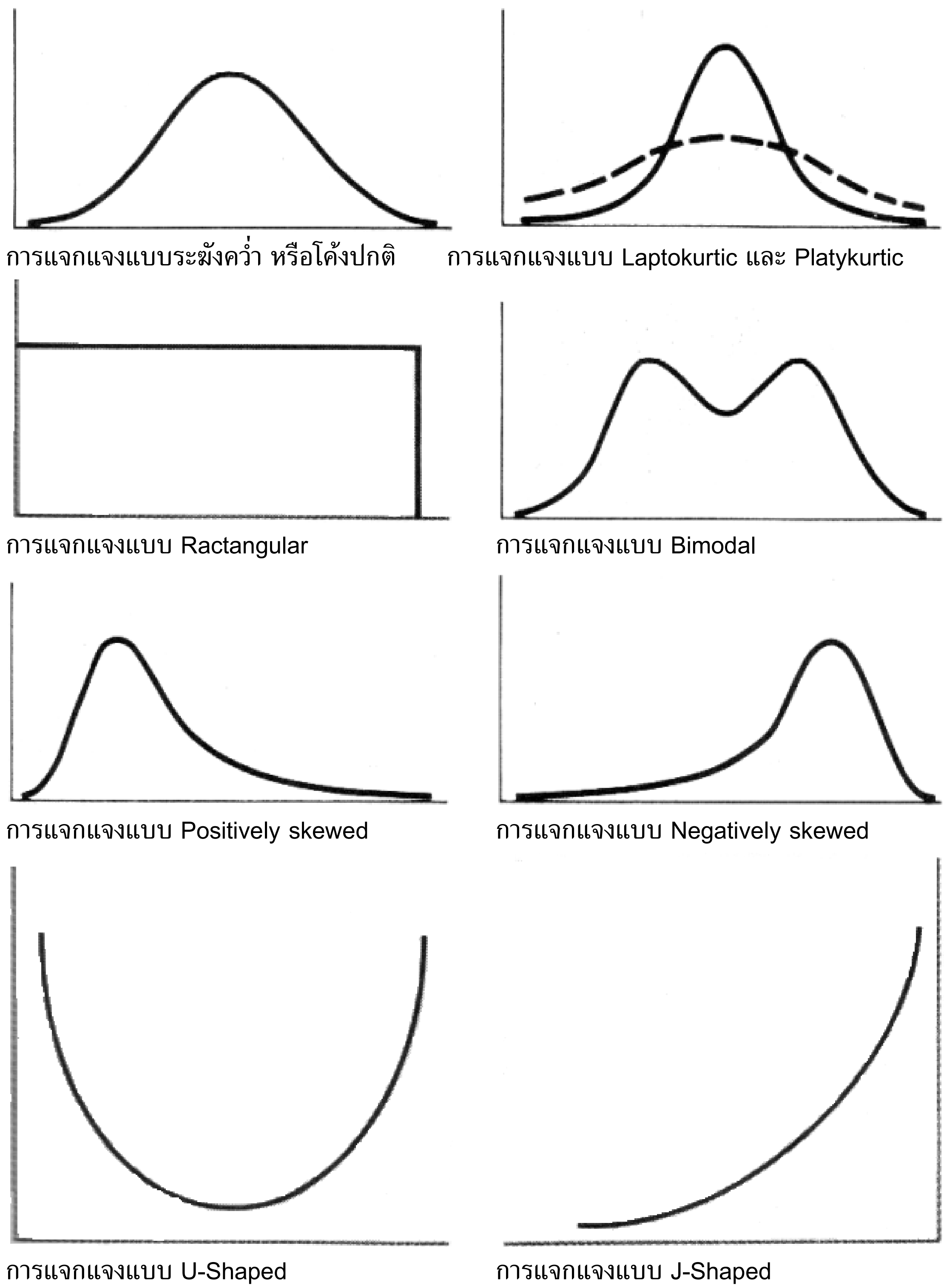
6) ที่จุด z = ±1.96 จะมีพื้นที่ใต้โค้งรวมได้ 95% และที่ z = ±2.58 จะมีพื้นที่ใต้โค้งรวมได้ 99% ดังนั้นพื้นที่ที่เหลืออยู่อีก 5% และ 1% ตามลำดับจะเป็นพื้นที่ที่เหลืออยู่บริเวณปลายโค้ง



ภาพประกอบ 2.3 แสดงตำแหน่ง z-score และพื้นที่ใต้โค้ง

จากตาราง 2.4 การแจกแจงของคะแนนในสดมภ์ที่ 3 ความถี่ที่อยู่ตรงกลางจะมากที่สุด มีค่าความโด่งสูง เรียกว่าการแจกแจงแบบ leptokurtic การแจกแจงในสดมภ์ที่ 4 ความถี่ที่อยู่ตรงกลางจะน้อย ค่าความโด่งจะต่ำเรียกว่าการแจกแจงแบบ platykurtic การแจกแจงในสดมภ์ที่ 5 ค่าความถี่จะเท่ากันหมดทุกชั้นคะแนนเรียกว่าการแจกแจงแบบ rectangular การแจกแจงในสดมภ์ที่ 6 มีฐานนิยม 2 ค่า เรียกว่าการแจกแจงแบบ bimodal ในสดมภ์ที่ 7 ความถี่ที่มากที่สุดจะอยู่ในช่วงต้นและช่วงท้าย ส่วนคะแนนตรงกลางจะมีความถี่ต่ำ เรียกว่า U-shaped การแจกแจงในสดมภ์ที่ 2 – 7 จะมีลักษณะสมมาตรและมีคะแนนเฉลี่ยเท่ากัน จะแตกต่างกันตรงความแปรปรวน

การแจกแจงของข้อมูลในสดมภ์ที่ 8 เรียกว่าการแจกแจงแบบเบ้บวก (Positived skewed) และในสดมภ์ที่ 9 เรียกว่าการแจกแจงแบบเบ้ลบ (Negatively skewed) และสดมภ์ที่ 10 ซึ่งเป็นสดมภ์สุดท้ายจะเป็นการแจกแจงแบบเบ้ด้านที่คะแนนต่ำสุด เรียกว่าการแจกแจงแบบ J-shaped การแจกแจงรูปแบบต่าง ๆ จะแสดงดังภาพประกอบ 2.4



ภาพประกอบ 2.4 การแจกแจงของคะแนนในรูปแบบต่าง ๆ

หนังสืออ่านประกอบ

ชูศรี วงศ์รัตนะ. (2544). ***เทคนิคการใช้สถิติเพื่อการวิจัย***. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ภัทรา นิคมานนท์. (2538). ***การประเมินผลการเรียน (Learning Evaluation)***. กรุงเทพฯ : อักษราพิพัฒน์.

ไพศาล หวังพานิช. (2526). ***การวัดผลการศึกษา***. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ไทยวัฒนาพานิช.

สมนึก ภัททิยธานี. (2541). ***การวัดผลการศึกษา***. กาฬสินธุ์ : ประสานการพิมพ์.

เสริม ทัศศรี. (2536). ***การวัดผลการศึกษา (Educational Measurement)***. สงขลา : ภาควิชาพื้นฐานของการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ภาคใต้.

สุรศักดิ์ อมรรัตนศักดิ์. (2530). ***ทฤษฎีทางการทดสอบ (Test Theory)***. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

อำนวย เลิศชยันตี. (2533). ***การทดสอบและการวัดผลทางการศึกษา***. กรุงเทพฯ : อำนวยการพิมพ์.

Devore, Jay and Peck, Roxy. (1993). ***Statistics : The Exploration and Analysis of Data***. California : Wadsworth, Inc.,

Howell, David C. (1992). ***Statistical Methods for Psychology***. California : Wadsworth, Inc.,

John Wasson. (2004). ***Ed 602 - Lesson 7 - The Normal Curve and Standard Scores***. (Online) Available : http://www.mnstate.edu/wasson/ed602lesson7.htm. Retrieved November, 2004.

Runyon, Richard P. and Other. (1996). ***Fundamentals of Behavioral Statistics***. U.S.A. : McGraw-Hill,

คำถามท้ายบท

1. สถิติคืออะไร
2. เปรียบเทียบความแตกต่างของสถิติแต่ละประเภท
3. ค่าสถิติการวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางและการวัดการกระจายแต่ละตัวมีความเหมือนกันและแตกต่างกันอย่างไร
4. ค่าสถิติการวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางและการวัดการกระจายแต่ละตัวสามารถนำไปประยุกต์ใช้ทางการวัดผลการศึกษาได้อย่างไร
5. ความแปรปรวนของข้อสอบมีค่าสูงสุดเมื่อ p_i และ q_i มีค่าเป็นเท่าใด

6. วาดกราฟแสดงความแปรปรวนของข้อสอบ ณ ระดับ p_i ที่แตกต่างกันตั้งแต่ 0.00 ถึง 1.00 เว้นทีละ 0.10
7. ถ้าข้อสอบส่วนใหญ่ค่อนข้างง่าย การแจกแจงของคะแนนจะเป็นอย่างไร
8. ถ้าข้อสอบส่วนใหญ่ค่อนข้างยาก การแจกแจงของคะแนนจะเป็นอย่างไร
9. นักเรียนห้องหนึ่งมีจำนวน 20 คน ทำแบบทดสอบ 3 ฉบับ ได้ผลคะแนนดังตาราง

นักเรียนคนที่	แบบทดสอบ 1	แบบทดสอบ 2	แบบทดสอบ 3
1	2	2	5
2	1	2	4
3	1	1	5
4	1	1	3
5	5	3	6
6	4	4	4
7	7	5	6
8	6	5	4
9	7	7	3
10	8	6	3
11	3	4	3
12	3	3	6
13	6	6	9
14	6	6	8
15	10	8	9
16	9	9	6
17	6	10	4
18	6	9	5
19	9	4	8
20	10	4	9

ตอบคำถามต่อไปนี้

9.1 ให้คำนวณสถิติการวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางและการวัดการกระจายทุกตัว

9.2 แปลความหมายผลของค่าสถิติที่ได้จากข้อ 9.1

9.3 วิเคราะห์ความสัมพันธ์ของคะแนนแบบทดสอบทั้ง 3 ฉบับ เป็นรายคู่ และแปลความหมายค่าสหสัมพันธ์ที่ได้

9.4 การแจกแจงของคะแนนแบบทดสอบทั้ง 3 ฉบับมีลักษณะอย่างไร